Révisions d'analyse vectorielle

Avant d'aborder le dernier chapitre d'électromagnétisme il n'est pas inutile de faire un point des connaissances acquises sur les opérateurs d'analyse vectorielle qui agissent sur des champs scalaires ou des champs vectoriels. Toutes les définitions et les expressions de chaque opérateur dans les différents systèmes de coordonnées sont dans le polycopié d'analyse vectorielle.

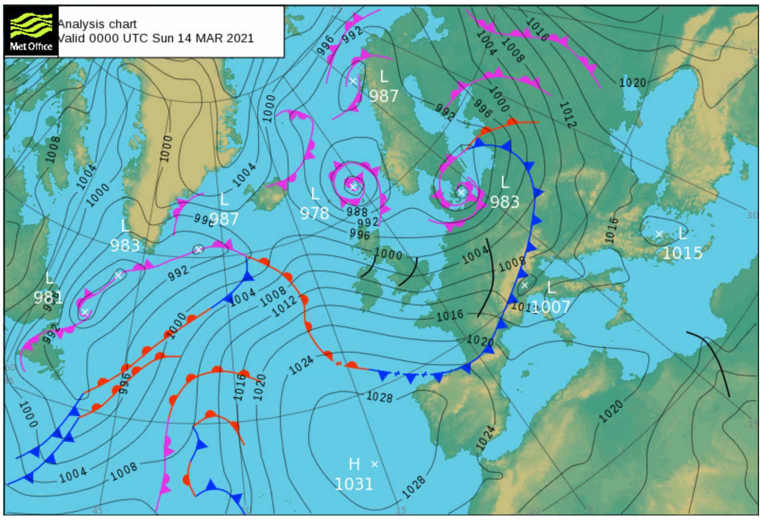
I. Quelques rappels

I.1. Champ scalaire - champ vectoriel

Soit $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ le vecteur position d'un point M (en coordonnées cartésiennes $\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$).

▷ Champ scalaire :

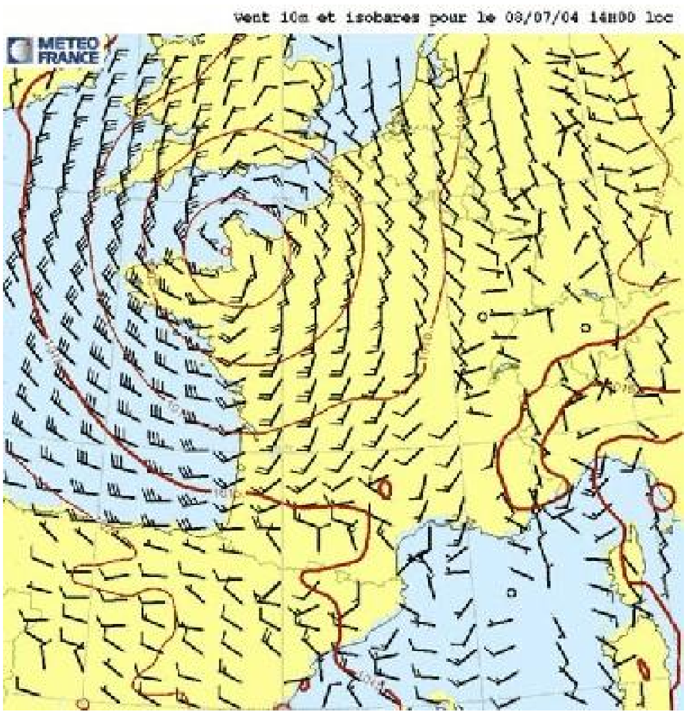
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ \vec{r} & \mapsto & f(\vec{r}) \end{array}$$



Donner des exemples physiques de champs scalaires :

▷ Champ vectoriel :

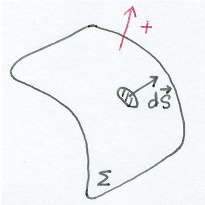
$$\vec{A}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \vec{r} & \mapsto & \vec{A}(\vec{r}) \end{array}$$



Donner des exemples physiques de champs vectoriels :

I.2. Flux d'un champ vectoriel à travers une surface (ouverte ou fermée)

▹ Rappeler la définition du **flux** ϕ d'un champ vectoriel $\vec{A}$ à travers une surface Σ.



Comment modifie-t-on la notation lorsque la surface Σ est fermée ?

▹ Exemples :

- ☐ En mécanique des fluides on note $\vec{j} = \rho\vec{v}$ le vecteur densité de flux de masse. À quoi correspond le flux de $\vec{j}$ à travers une surface ?

- ☐ Rappeler le théorème de Gauss

▹ Définir un champ vectoriel à flux conservatif (deux formulations équivalentes).

I.3. Circulation d'un champ vectoriel le long d'un circuit (ouvert ou fermé)

▷ Rappeler la définition de la circulation d'un champ vectoriel $\vec{A}$ le long du chemin $\mathscr{C}$ allant du point A au point B.

Comment modifie-t-on la notation lorsque le circuit $\mathscr{C}$ est fermée ?

▷ Exemple : rappeler le théorème d'Ampère de la magnétostatique.

▷ Définir un champ vectoriel à circulation conservative (deux formulations équivalentes).

II. L'opérateur gradient

II.1. Définition

Le gradient est un champ vectoriel qui caractérise les variations spatiales d'un champ scalaire.

Soit f un champ scalaire. Le gradient de f au point M est défini par la relation :

$$\mathrm{d}f(M) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f(M).\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

Propriétés :

Le vecteur gradient est perpendiculaire aux surfaces iso-f (définies par $f = Cte$) et orienté vers les valeurs de f croissantes.

Expression en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f =$$

On peut formellement écrire, en utilisant l'opérateur symbolique *nabla* (que l'on n'utilisera qu'en *coordonnées cartésiennes*) :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\,\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{u}_z$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f =$$

Les expressions du gradient en coordonnées cylindriques et sphériques sont précisées dans le formulaire d'analyse vectorielle. Leurs expressions dans des géométries simples sont cependant à connaître :

- En coordonnées cylindriques, si $f = f(r)$: $\overrightarrow{\text{grad}}\, f =$
- En coordonnées sphériques, si $f = f(r)$: $\overrightarrow{\text{grad}}\, f =$

II.2. Quelques calculs

▹ Soit le champ scalaire $f(x,y,z) = xy^2 - yz^2$. Calculer $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$.

▹ Soit le champ scalaire $f(x,y,z) = xyz\sin(xy)$. Calculer $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$.

II.3. L'opérateur gradient en physique

a) Électrostatique

Rappeler le lien entre le champ électrostatique $\vec{E}$ et le potentiel électrostatique V.

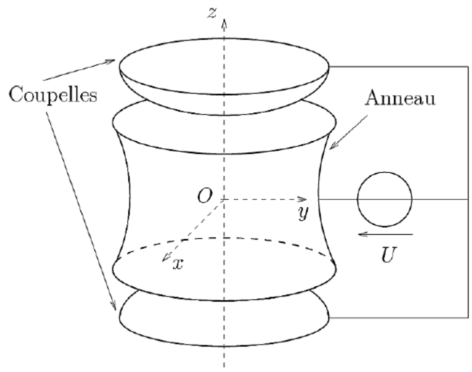
Calculer la circulation de $\vec{E}$ le long d'une ligne reliant le point A au point B :

$$\int_A^B \vec{E}.\mathrm{d}\vec{\ell} =$$

Quelle remarque peut-on faire ?

▷ Piège de Paul

Le piège de Paul est un dispositif permettant de piéger des ions. Il est notamment utilisé dans les horloges de très haute précision.
Il est constitué d'une électrode latérale en anneau portée au potentiel $+U/2$ et de deux électrodes supérieures et inférieures (coupelles) distantes de $2z_c$ et portées au potentiel $-U/2$.
Le potentiel électrostatique créé par ce dispositif a pour expression :

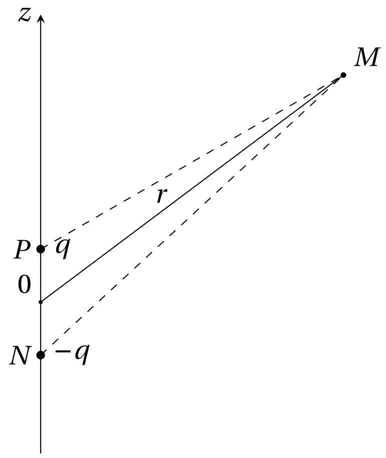


$$V(x, y, z) = \frac{U}{2z_c^2}(x^2 + y^2 - 2z^2)$$

☐ Déterminer l'expression du champ électrostatique.

☐ Représenter l'allure du champ électrique en des points proches de O et situés, soit sur l'axe Oz, soit dans le plan xOy. Ce dispositif seul permettrait-il de stocker des ions ?

▹ Dipôle électrostatique

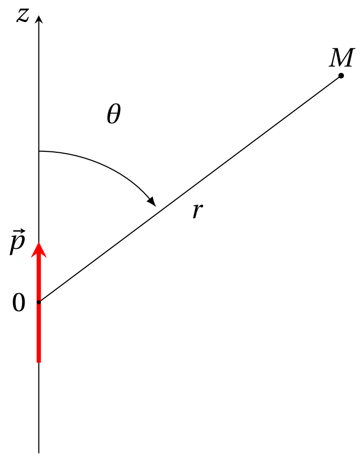


Une molécule est électriquement neutre. Cependant, certains atomes attirent davantage les électrons que d'autres (on dit qu'ils sont plus électronégatifs). On peut alors modéliser une molécule par deux charges opposées $+q$ et $-q$ distantes de a.

On cherche à exprimer le potentiel puis le champ électrostatique crée par cette distribution à une distance $r \gg a$.

On pose $\vec{p} = qa\,\vec{u}_z = p\vec{u}_z$. Ce vecteur $\vec{p}$ est appelé moment dipolaire.

☐ Donner l'expression du potentiel électrostatique $V(M)$ créé au point M par les deux charges en fonction de q, PM,NM, et ε_0. On suppose le potentiel nul à l'infini.



On suppose $r \gg a$. On peut montrer, à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 en a/r que le potentiel a pour expression approchée, en coordonnées sphériques :

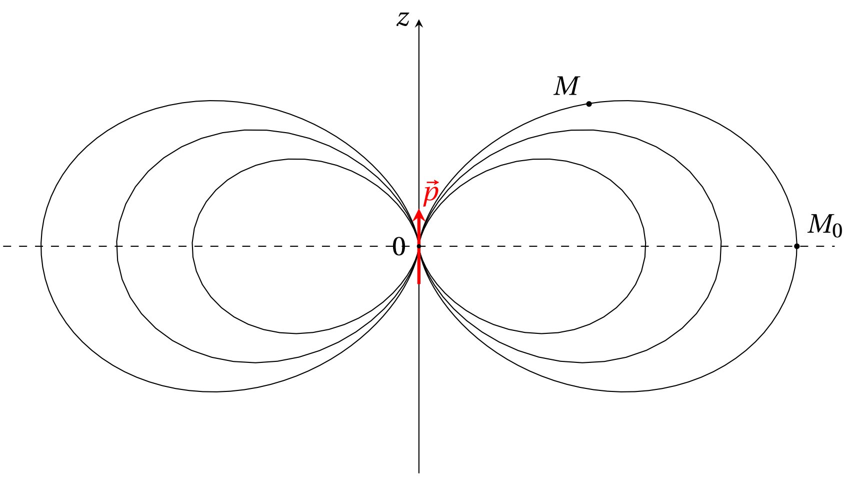
$$V(M) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

☐ Représenter sur le schéma ci-dessus, les vecteurs $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\varphi$ des coordonnées sphériques.

☐ À l'aide de votre formulaire d'analyse vectorielle, déterminer les composantes E_r, E_θ et E_θ du champ électrostatique.

Retrouver directement la valeur de E_φ en utilisant les propriétés de symétrie de la distribution.

☐ On a représenté sur la figure ci-dessous quelques lignes de champ électrique. Préciser l'orientation des lignes de champ. Représenter l'allure du champ $\vec{E}$ en M et en M_0. Par des considérations de symétrie, retrouver la direction du champ électrostatique dans le plan $z = 0$.



b) Mécanique

On considère un champ de force conservative $\vec{F}$ qui dérive d'une énergie potentielle E_p.

▷ Exprimer le travail élémentaire δW de cette force :

▷ Donner le lien mathématique entre $\vec{F}$ et E_p :

▷ En déduire l'expression du travail de A à B de la force $\vec{F}$.

$$W_{A\to B}(\vec{F}) =$$

▷ Citer des forces conservatives et donner l'énergie potentielle associée.

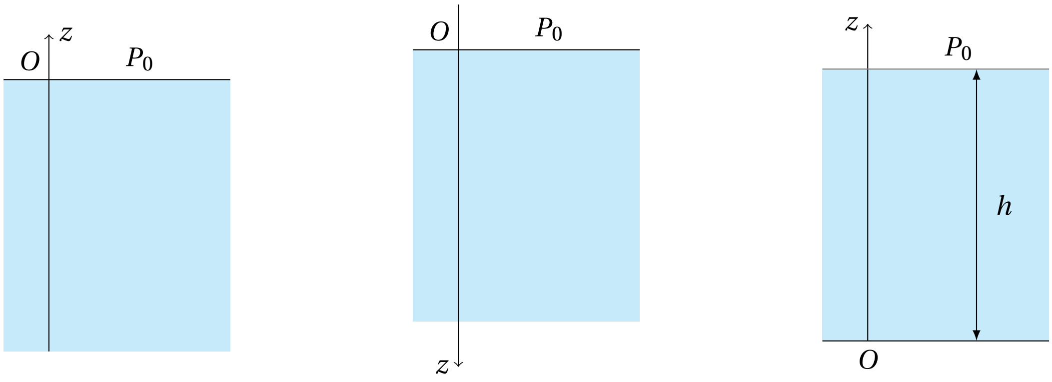
c) Statique des fluides

On considère un volume mésoscopique $\mathrm{d}V$ de fluide à l'équilibre dans un référentiel galiléen et soumis à un champ de pesanteur $\vec{g}$.

▷ À quoi correspond $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\,\mathrm{d}V$? Interpréter physiquement le signe "$-$".

▷ Exprimer la condition d'équilibre de ce volume mésoscopique et en déduire la loi de la statique des fluides.

▷ Retrouver l'expression du champ de pression dans un fluide incompressible dans les différentes configurations suivantes.



(a) (b) (c)

- ▷ Retrouver l'expression du champ de pression dans une atmosphère isotherme de température T_0, en rappelant les hypothèses utilisées. On note P_0 la pression à l'altitude nulle.

III. L'opérateur divergence

III.1. Définition

On admet le **théorème d'Ostrogradski** : soit $\vec{A}(M)$ un champ vectoriel ; il existe un unique champ scalaire $\operatorname{div}\vec{A}$ tel que, pour toute surface fermée $\mathscr{S}$, orientée vers l'extérieur, limitant le volume $\mathscr{V}$:

$$\Phi = \oiint_{\mathscr{S}} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\mathscr{V}} \operatorname{div}\vec{A}\,\mathrm{d}V$$

Si on fait tendre le volume $\mathscr{V}$ vers 0, on obtient pour un volume élémentaire dV :

$$\mathrm{d}\Phi = \operatorname{div}\vec{A}\,\mathrm{d}V$$

Expression en coordonnées cartésiennes :

$$\operatorname{div}\vec{A} =$$

Notation à l'aide de l'opérateur *nabla* :

$$\operatorname{div}\vec{A} =$$

Les expressions de la divergence en coordonnées cylindriques et sphériques sont précisées dans le formulaire d'analyse vectorielle.

▷ Donner la définition locale d'un champ vectoriel $\vec{A}$ à flux conservatif.

III.2. Quelques calculs

▷ On considère le champ vectoriel $\vec{A} = \alpha\vec{r} = \alpha(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

- ☐ Représenter l'allure du champ vectoriel dans le cas $\alpha > 0$.

- ☐ Calculer $\operatorname{div}\vec{A}$.

- ☐ Vérifier la validité du théorème d'Ostrogradski dans ce cas particulier en choisissant une surface $\mathscr{S}$, sphérique de centre O et de rayon r.

III.3. L'opérateur divergence en physique

a) En mécanique des fluides

▷ Exprimer localement la conservation du débit de masse pour un écoulement stationnaire.

▷ Que représente physiquement $\operatorname{div}\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse d'écoulement du fluide ?

▷ Comment se traduit macroscopiquement la propriété locale $\operatorname{div}\vec{v} = 0$?

b) Électromagnétisme

▷ Donner l'expression locale du théorème de Gauss (équation de Maxwell-Gauss). Que devient cette expression dans le vide ?

▷ Le champ magnétique $\vec{B}$ est à flux conservatif. Donner une formulation locale de cette propriété (équation de Maxwell-flux).

▷ Exprimer de manière locale la conservation de la charge (voir cours EM3) à trois dimensions.

IV. L'opérateur rotationnel

IV.1. Définition

On admet le **théorème de Stokes** : soit $\vec{A}(M)$ un champ vectoriel ; il existe un unique champ vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ tel que, pour toute surface $\mathscr{S}$ s'appuyant sur le contour fermé $\mathscr{C}$, $\mathscr{S}$ étant orientée par le sens de parcours choisi sur $\mathscr{C}$:

$$C = \oint_{\mathscr{C}} \vec{A}.\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \iint_{\mathscr{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}.\mathrm{d}\vec{S}$$

Si on fait tendre la surface délimitée par le contour $\mathscr{C}$ vers 0, on obtient

$$\mathrm{d}C = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

Expression en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} =$$

Notation à l'aide de l'opérateur *nabla* :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} =$$

Les expressions du rotationnel en coordonnées cylindriques et sphériques sont précisées dans le formulaire d'analyse vectorielle.

▹ Donner la définition locale d'un champ vectoriel $\vec{A}$ à circulation conservative.

IV.2. Quelques calculs

▹ Vérifier la propriété suivante

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f) = \vec{0}$$

En déduire que tout champ vectoriel à circulation conservative peut s'écrire sous la forme $\vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$.

▹ Vérifier la propriété suivante :

$$\mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) = 0$$

IV.3. L'opérateur rotationnel en physique

a) En mécanique des fluides

▷ Rappeler l'expression du champ de vitesse $\vec{v}(M)$ pour un solide en rotation à la vitesse angulaire ω autour d'un axe Oz fixe dans le référentiel d'étude .

▷ Calculer $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}$

▷ En mécanique des fluides on pose $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}$. Que représente physiquement ce vecteur ?

b) En électromagnétisme

▷ Donner une formulation locale du théorème d'Ampère (équation de Maxwell-Ampère de la statique).

▷ On considère une distribution de courants telle que, pour $-a/2 \leqslant z \leqslant a/2$, le champ magnétique créé a pour expression $\vec{B} = \mu_0 j z \vec{u}_y$ avec j constant. Déterminer le vecteur densité volumique de courant pour $-a/2 \leqslant z \leqslant a/2$.

On s'intéresse à présent à un opérateur faisant intervenir des dérivées spatiales d'ordre 2.

V. L'opérateur laplacien scalaire

V.1. Définition

Soit f un champ scalaire. On définit le **laplacien scalaire** Δf par

$$\Delta f = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f)$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

V.2. L'opérateur laplacien en physique

- ▷ En électrostatique, le champ électrique est à circulation conservative. Le champ électrostatique vérifie donc la loi locale :

- ▷ On introduit donc un potentiel électrostatique V tel que

$$\vec{E} =$$

- ▷ L'équation de Maxwell-Gauss dans le vide donne :

- ▷ En déduire l'équation vérifiée par le potentiel V dans le vide (équation de Laplace)

V.3. Calcul

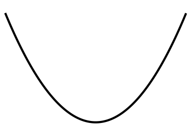
- ▷ Vérifier que $\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} V) = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

V.4. Interprétation

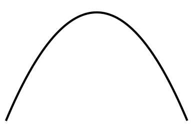
a) Dérivée seconde d'une fonction à une variable

Pour des fonctions à une seule variable (cas 1D) le laplacien se réduit à la dérivée seconde de la fonction $\Delta f = \dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = f''(x)$.

Supposons qu'une fonction admette un extremum en $x = x_0$: $f'(x_0) = 0$. Le signe de la dérivée seconde $f''(x_0)$ donne une indication sur la concavité de la courbe au niveau de l'extremum.



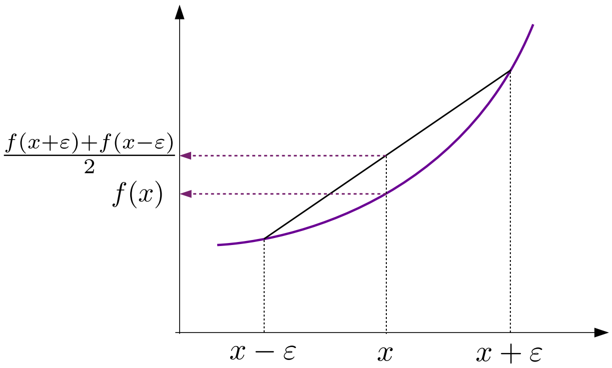
$f''(x_0) > 0$



$f''(x_0) < 0$

Plaçons nous en un point quelconque (pas nécessairement un extremum).
Considérons l'intervalle $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ au voisinage de x : $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$.

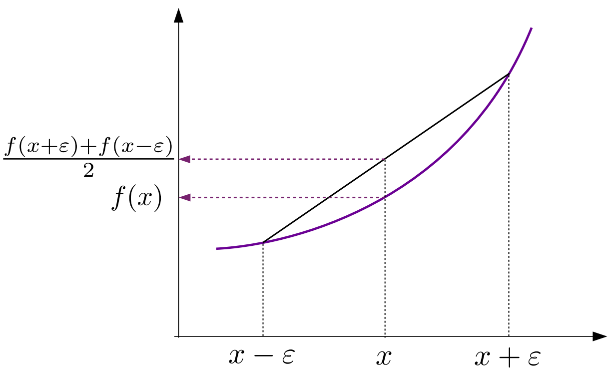
On cherche à estimer l'écart entre la valeur moyenne des valeurs prises par la fonction aux bornes de l'intervalle et la valeur en x : $\frac{f(x+\varepsilon)+f(x-\varepsilon)}{2} - f(x)$ (voir figure ci-dessous).



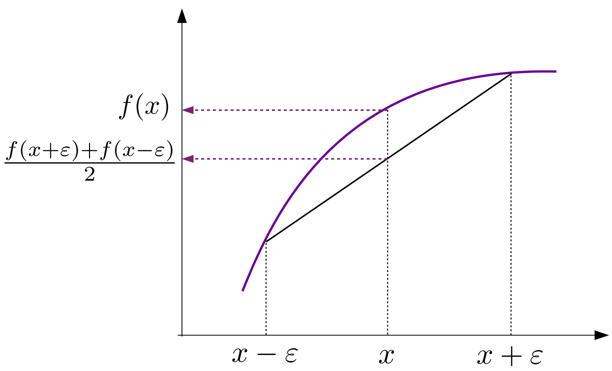
À l'aide de développements limités à l'ordre 2 estimer cet écart.

$$\frac{f(x+\varepsilon)+f(x-\varepsilon)}{2} - f(x) =$$

ainsi :



$f''(x) > 0$



$f''(x) < 0$

Lorsque $\Delta f = f''(x) > 0$ les valeurs prises en moyenne par la fonction sur un voisinage de x sont supérieures à $f(x)$.
Lorsque $\Delta f = f''(x) < 0$ les valeurs prises en moyenne par la fonction sur un voisinage de x sont inférieures à $f(x)$.

b) Transposition à trois dimensions

On considère un point M ou un champ scalaire f admet un minimum local. Tracer les lignes de champ de $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ au voisinage du point M. En déduire $\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\, f) > 0$.

Faire le même raisonnement lorsque f admet un maximum en M.

En reprenant l'exemple du piège de Paul, justifier pourquoi un champ électrostatique seul ne peut pas piéger une charge.