L'opérateur laplacien scalaire

La relation de conservation de la charge (ou de la masse) dans le cas 1D où $\vec{j} = j\vec{u}_x$ s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0.$$

On admet sa généralisation au cas 3D (démontrable à l'aide du théorème d'Ostrogradski) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0$$

Dans le chapitre précédent, on a établi dans le cas d'une propagation unidirectionnelle parallèlement à $\vec{u}_x$, l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

On peut se demander ce que devient cette relation, quand on envisage par exemple la propagation 3D d'ondes acoustiques pour lesquelles $p = p(\vec{r}, t) = p(x, y, z, t)$?

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0\ ?$$

I. Définition

Soit f un champ scalaire. On définit le **laplacien scalaire** Δf par

$$\Delta f = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f)$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Notation à l'aide de l'opérateur *nabla* : $\Delta f = \nabla^2 f$

Calcul

▷ Vérifier que $\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} V) = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$$

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} V) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} V) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Exemple d'utilisation en physique

▷ En électrostatique, le champ électrique est à circulation conservative. On a introduit un potentiel électrostatique V tel que

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V \quad \text{avec} \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = V_A - V_B$$

▷ L'équation de Maxwell-Gauss $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ donne dans le vide :

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0$$

▷ En déduire l'équation vérifiée par le potentiel V dans le vide (équation de Laplace) :

$$-\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V) = 0$$
$$\Delta V = 0$$

II. Interprétation du laplacien scalaire

II.1. Dérivée seconde d'une fonction à une variable

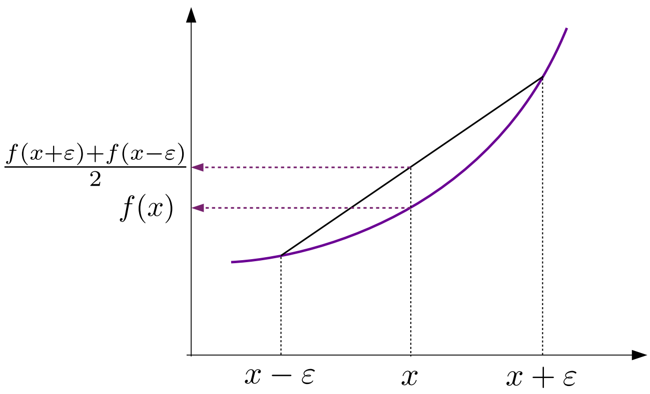
Pour des fonctions à une seule variable le laplacien se réduit à la dérivée seconde de la fonction :

$$\Delta f = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = f''(x).$$

Supposons qu'une fonction admette un extremum en $x = x_0$: $f'(x_0) = 0$. Le signe de la dérivée seconde $f''(x_0)$ donne une indication sur la concavité de la courbe au niveau de l'extremum.

$f''(x_0) > 0$ $\qquad$ $f''(x_0) < 0$

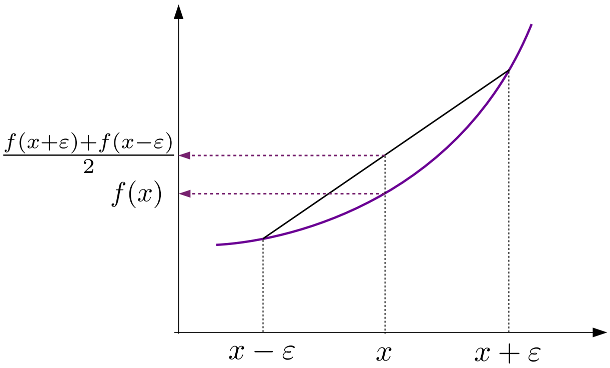
Plaçons nous à présent en un point quelconque (pas nécessairement un extremum).
Considérons l'intervalle $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ au voisinage de x.
On cherche à estimer l'écart entre la valeur moyenne des valeurs prises par la fonction aux bornes de l'intervalle et la valeur en x : $\frac{f(x+\varepsilon)+f(x-\varepsilon)}{2} - f(x)$ (voir figure ci-dessous).



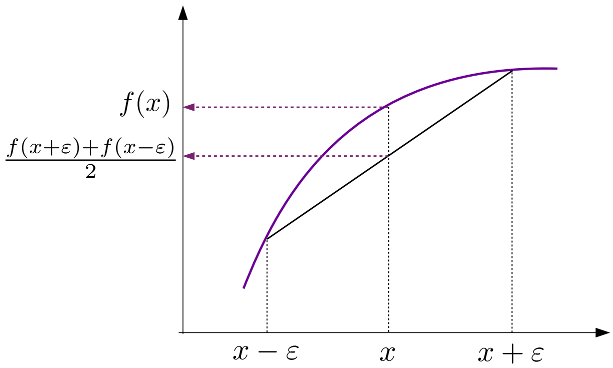
À l'aide de développements limités à l'ordre 2 estimer cet écart.

$$\begin{aligned}\frac{f(x+\varepsilon)+f(x-\varepsilon)}{2} - f(x) &= \frac{f(x) + \cancel{\varepsilon f'(x)} + \frac{\varepsilon^2}{2}f''(x) + (f(x) - \cancel{\varepsilon f'(x)} + \frac{\varepsilon^2}{2}f''(x))}{2} - f(x)\\ &= f(x) + \frac{\varepsilon^2}{2}f''(x) - f(x)\\ &= \frac{\varepsilon^2}{2}f''(x)\end{aligned}$$

Ainsi :



$f''(x) > 0$



$f''(x) < 0$

Lorsque $\Delta f = f''(x) > 0$ les valeurs prises en moyenne par la fonction sur un voisinage de x sont supérieures à $f(x)$.
Lorsque $\Delta f = f''(x) < 0$ les valeurs prises en moyenne par la fonction sur un voisinage de x sont inférieures à $f(x)$.

II.2. Transposition à trois dimensions

On considère un point M ou un champ scalaire f admet un minimum local. Tracer les lignes de champ de $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ au voisinage du point M. En déduire $\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\, f) > 0$.

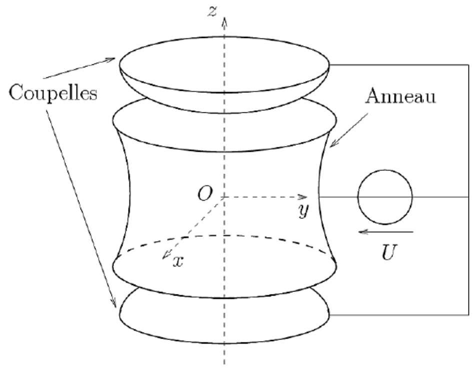
Faire le même raisonnement lorsque f admet un maximum en M.

On a montré que dans le vide $\Delta V = 0$: le potentiel électrostatique n'admet donc pas d'extremum local. Nous allons voir que cette propriété nous empêche de pouvoir piéger des ions à l'aide d'un champ électrostatique.

II.3. Piège de Paul

▷ Piège de Paul

Le piège de Paul est un dispositif permettant de piéger des ions. Il est notamment utilisé dans les horloges de très haute précision.
Il est constitué d'une électrode latérale en anneau portée au potentiel $+U/2$ et de deux électrodes supérieures et inférieures (coupelles) distantes de $2z_c$ et portées au potentiel $-U/2$.
Le potentiel électrostatique créé par ce dispositif a pour expression :



$$V(x,y,z) = \frac{U}{4z_c^2}(x^2+y^2-2z^2)$$

☐ Déterminer l'expression du champ électrostatique et calculer sa valeur à l'origine O.

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V = -\frac{U}{4z_c^2}\left|\begin{array}{l}2x\\2y\\-4z\end{array}\right. = \frac{U}{2z_c^2}\left|\begin{array}{l}-x\\-y\\2z\end{array}\right.$$

$$\vec{E}(O) = \vec{0}$$

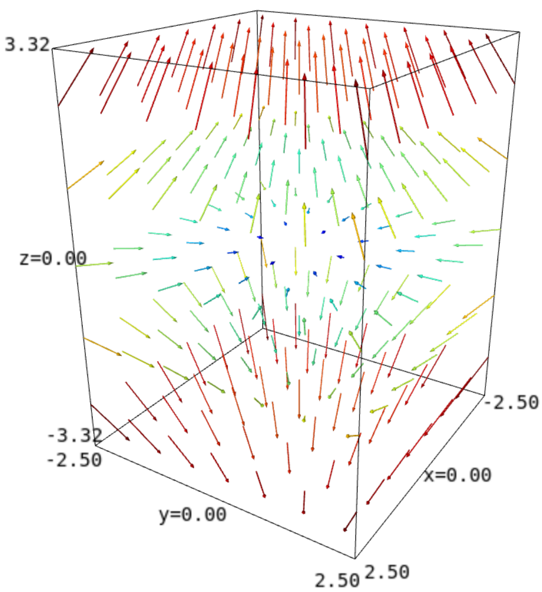
☐ Calculer ΔV. Commenter.

$$\Delta V = \frac{U}{4z_c^2}(2+2-4)$$

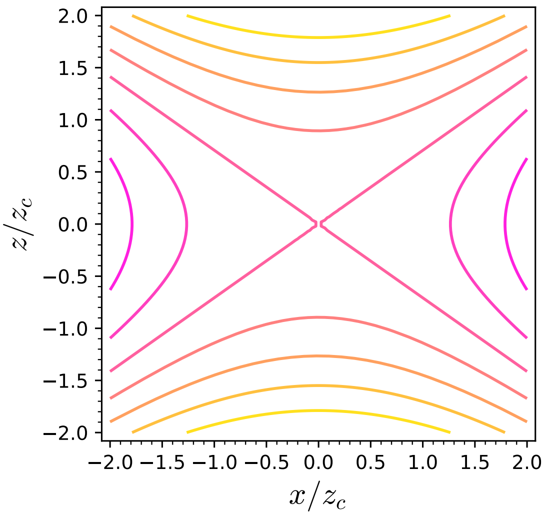
$$\Delta V = 0$$

qui correspond bien à l'équation de Laplace vérifiée par le potentiel V dans le vide.

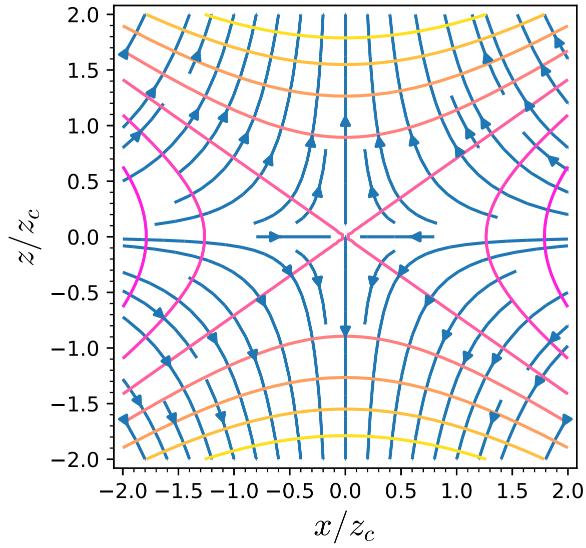
☐ On a représenté l'allure du champ électrique en des points proches de O. Ce dispositif seul permettrait-il de stocker des ions ?



Visualisation du champ $\vec{E}$.



Visualisation des isopotentielles dans le plan $y=0$ (valable dans tout plan contenant l'axe Oz car les éléctrodes sont invariantes par rotation quelconque autour de Oz) : les électrodes coïncident avec des surfaces isopotentielles ($V = U/2$ et $V = -U/2$)



Superposition des isopotentielles et des lignes de champ électrostatique orientées dans le sens des potentiels décroissants.

Considérons un ion de charge $q > 0$. Il est soumis a une force $\vec{F} = q\vec{E}$ (le poids est négligeable). Le champ électrique est nul en O : le point O correspond à une position d'équilibre. Si l'ion de déplace légèrement dans le plan horizontal $z = 0$, la force $\vec{F} = q\vec{E}$ de même sens que $\vec{E}$ pour $q > 0$ tend à le ramener vers O. Par contre, si l'ion se déplace verticalement la force $\vec{F} = q\vec{E}$ tend à l'éloigner davantage de O : la position d'équilibre est instable verticalement.

Pour un ion négatif on observerait une instabilité dans le plan horizontal. Ainsi, le dispositif en l'état ne permet pas de stoker un ion.

Pour palier ce problème il faut inverser régulièrement la tension pour que l'ion puisse être maintenu dans le piège. La tension U appliquée est en fait une tension alternative dont il faut ajuster la fréquence pour stabiliser la position d'équilibre.

- Lien avec $\Delta V = 0$

  Puisque, dans le vide $\Delta V = 0$, le potentiel n'admet pas de maximum ou de minimum local, les lignes de champ électrostatique ne peuvent ni diverger d'un point (ce qui permettrait de piéger un ion négatif) ni converger en un point (ce qui permettrait de piéger un ion positif). Ainsi un champ électrostatique seul ne peut pas piéger un ion.