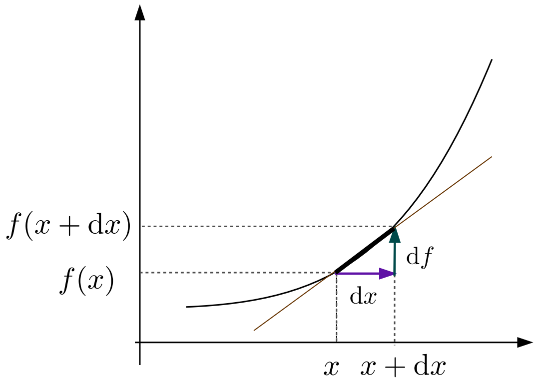
Dérivée d'une fonction



On considère une fonction :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

La dérivée de la fonction en x est définie par

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{f(x + \mathrm{d}x) - f(x)}{\mathrm{d}x}}$$

Lorsque $\mathrm{d}x \to 0$, on peut écrire

$$\mathrm{d}f = f(x + \mathrm{d}x) - f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

où $\mathrm{d}f$ est appelée différentielle de f en x.

Notations :

La dérivée peut être notée de deux manières : $f'(x)$ ou bien $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Interprétation :

$f'(x)$ représente la pente de la tangente à la courbe en x.

Exemples :

- Dériver les fonctions suivantes :

  $f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x$

  $f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$

  $f(x) = \ln x \qquad f'(x) = \dfrac{1}{x}$

  $f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\sin x$

  $f(x) = \dfrac{1}{x} \qquad f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

- **Dérivée de fonctions composées :**

  On considère une fonction u

  $(u^2)' = 2uu'$

  $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

  $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

  $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

- En physique la variable ne s'appelle pas toujours x. On utilise aussi t qui correspond à la variable *'temps'*.

  Dériver les fonctions suivantes :

  $f(t) = 2t^3 \quad f'(t) = 6t^2$

  $f(t) = e^{2t} \quad f'(t) = 2e^{2t}$

  $f(t) = \sin 3t \quad f'(t) = 3\cos 3t$

- En physique la fonction ne s'appelle pas toujours f. En général la fonction porte le nom de la grandeur physique qu'elle représente. Par exemple $P(z)$ représente la pression en fonction de l'altitude z, $U(t)$ une tension en fonction du temps. On peut même écrire $x(t)$ où x est la fonction 'position' et t la variable 'temps'.

  Dériver les fonctions suivantes :

  $P(z) = P_0 e^{-z/H}$ avec $(P_0, H) \in \mathbb{R}^2 \quad P'(z) = -\dfrac{P_0}{H} e^{-z/H}$

  $U(t) = U_0 \cos \omega t$ avec $(U_0, \omega) \in \mathbb{R}^2 \quad U'(t) = -U_0 \omega \sin \omega t$

  $x(t) = \dfrac{1}{2} g t^2$ avec $g \in \mathbb{R} \quad x'(t) = gt$

Notation de la dérivée temporelle :

En physique, la dérivée par rapport au temps est souvent notée par un point :

$$x'(t) \text{ sera notée } \dot{x}(t)$$