

Déplacements élémentaires dans les divers systèmes de coordonnées

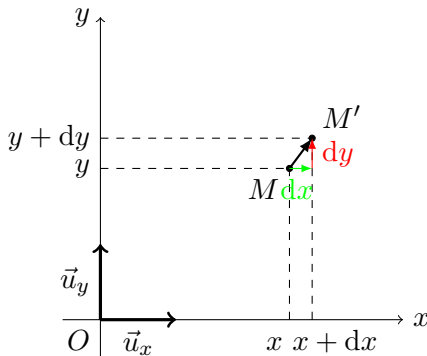
Nous avons décrit dans le cours M1 les différents systèmes de coordonnées 2D et 3D. On se propose d'exprimer le vecteur déplacement élémentaires $d\vec{OM}$ correspondant à un très petit déplacement du point M .

I. Systèmes de coordonnées du plan

I.1. Coordonnées cartésiennes

$$M(x, y) \text{ avec } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Base orthonormée : $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$



$$\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$$

On considère un second point M' infiniment proche de M de coordonnées $(x + dx, y + dy)$. Le vecteur $\vec{MM'}$ correspond au déplacement élémentaire :

$$\vec{MM'} = \vec{OM'} - \vec{OM} = d\vec{OM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y$$

$$d\vec{OM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y$$

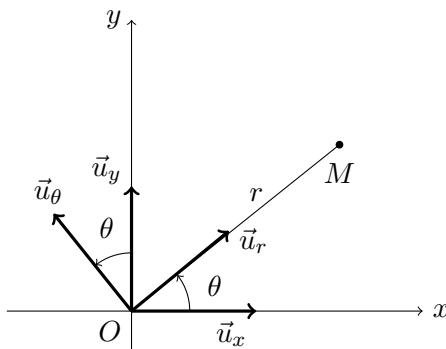
$$\begin{cases} M(x, y) \\ M'(x + dx, y + dy) \end{cases}$$

I.2. Coordonnées polaires

$$M(r, \theta) \quad \text{avec } r \in \mathbb{R}^+ \\ \theta \in [0, 2\pi[$$

Base orthonormée : $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

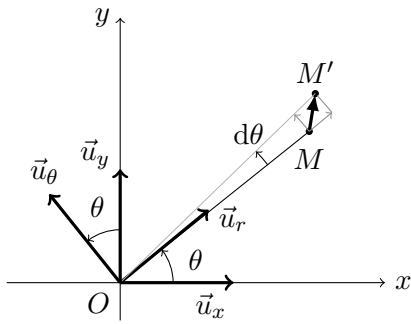
Le vecteur $\vec{u}_\theta$ se déduit du vecteur $\vec{u}_r$ par une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ dans le sens d'orientation choisi pour θ .



$$\vec{OM} = r\vec{u}_r$$

Le vecteur $\vec{u}_r$ suit la position du point M au cours de son mouvement. La base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est donc une base mobile au cours du mouvement de ce point. On peut projeter ces vecteurs sur la base fixe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$

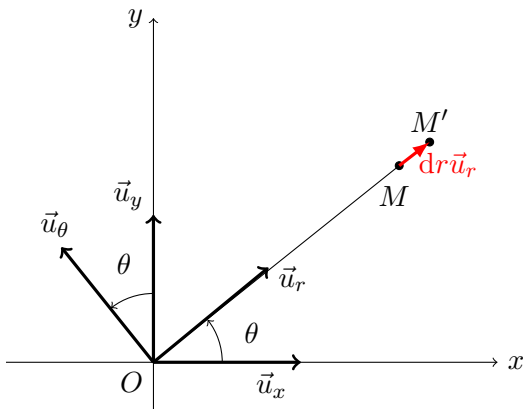
$$\begin{cases} \vec{u}_r = \\ \vec{u}_\theta = \end{cases}$$



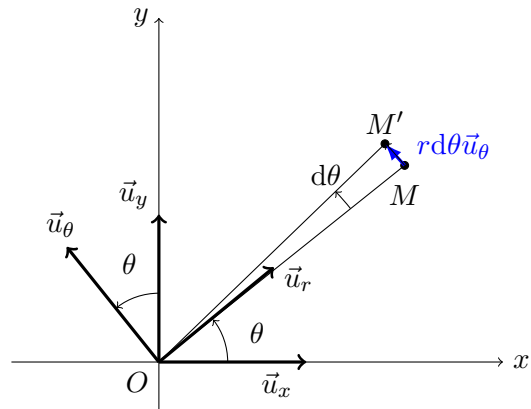
Déplacement élémentaire : $d\overrightarrow{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$

$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} \text{ avec : } \begin{cases} M(r, \theta) \\ M'(r + dr, \theta + d\theta) \end{cases}$$

Pour retrouver chacune des composantes du déplacement élémentaire, on fait varier successivement r et θ .



Lorsque r varie de dr à θ fixé ($d\theta = 0$), le déplacement élémentaire se réduit à $dr\vec{u}_r$.



Lorsque θ varie de $d\theta$ à r fixé ($dr = 0$), le déplacement suit un arc de cercle de rayon r dans la direction de $\vec{u}_\theta$: $r d\theta \vec{u}_\theta$.

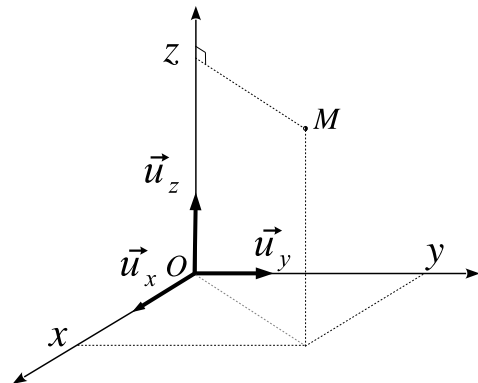
II. Systèmes de coordonnées de l'espace 3D

II.1. Coordonnées cartésiennes

$$M(x, y, z)$$

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$$

$$d\overrightarrow{OM} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$



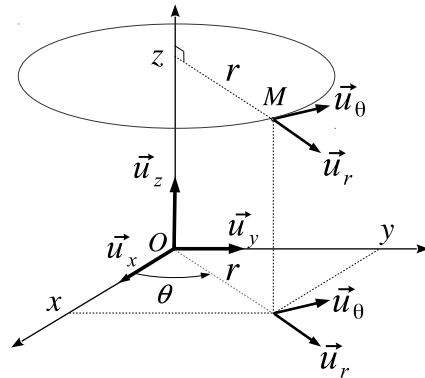
II.2. Coordonnées cylindriques (ou cylindro-polaires)

$$M(r, \theta, z) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} r \in \mathbb{R}^+ \\ \theta \in [0, 2\pi[\\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

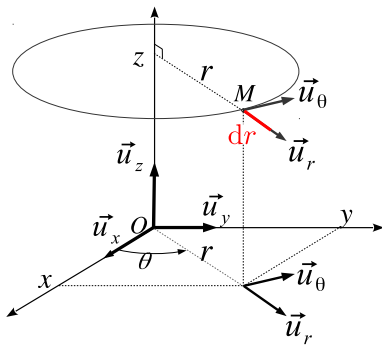
$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \vec{u}_r = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y \end{cases}$$

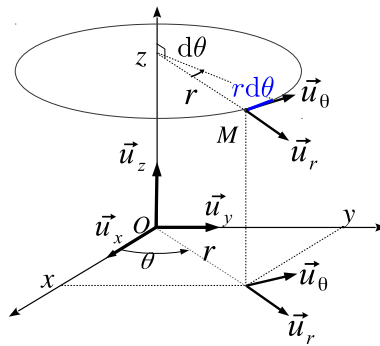
$$d\overrightarrow{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$



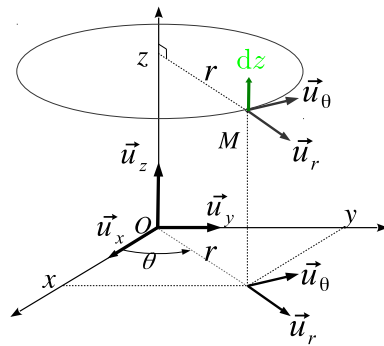
Pour retrouver les composantes du déplacement élémentaire on fait varier successivement r à θ et z fixés, θ à r et z fixés, z à r et θ fixés.



$$dr \vec{u}_r$$



$$r d\theta \vec{u}_\theta$$



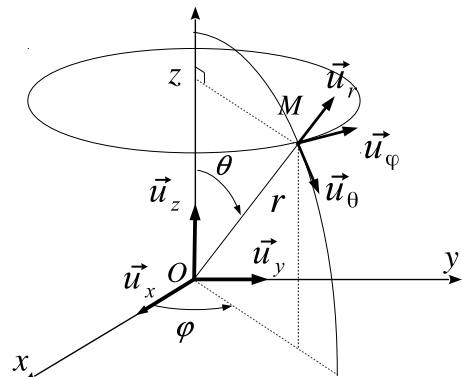
$$dz \vec{u}_z$$

II.3. Coordonnées sphériques

$$M(r, \theta, \varphi) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} r \in \mathbb{R}^+ \\ \theta \in [0, \pi] \\ \varphi \in [0, 2\pi[\end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r$$

$$d\overrightarrow{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$

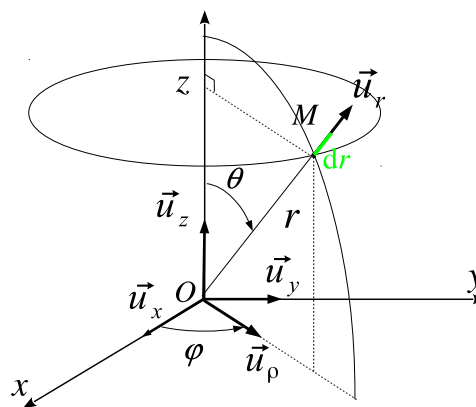


Pour retrouver les composantes du déplacement élémentaire, on fait varier successivement r à θ et φ fixés, puis θ à r et φ fixés et enfin φ à r et θ fixés.

Composante suivant $\vec{u}_r$

On fait varier r à φ et θ fixés. Le déplacement s'effectue radialement et donc parallèlement à $\vec{u}_r$. Il vaut

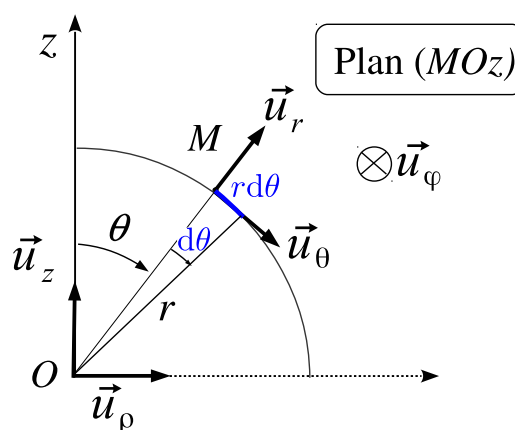
$$dr \vec{u}_r$$



Composante suivant $\vec{u}_\theta$

On fait varier θ à r et φ fixés. Le déplacement s'effectue alors le long d'un cercle méridien et vaut

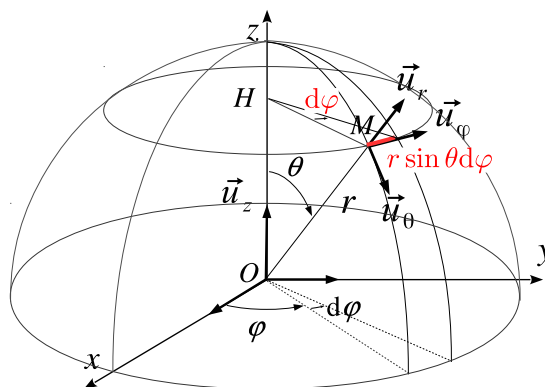
$$r d\theta \vec{u}_\theta$$



Composante suivant $\vec{u}_\varphi$

On fait varier φ à r et θ fixés. Le déplacement s'effectue alors le long d'un cercle parallèle et vaut

$$r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$



On retrouve bien graphiquement les trois composantes du déplacement élémentaire :

$$d\vec{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$