Résolution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants

Soit une équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants, vérifiée par la fonction $x(t)$:

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = s \tag{E}$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$, et s second membre de l'équation fonction de t (les deux cas au programme sont $s = cte$ et $s = s_m \cos(\omega t)$). En général en physique, on met l'équation sous une forme telle que $a = 1$.
On lui associe l'équation homogène, qui correspond à l'équation sans second membre.

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \tag{E0}$$

Théorème de Cauchy : la solution existe et est unique si on connaît les conditions initiales $x(0)$ et $\dot{x}(0)$.

La solution générale de l'équation (E) est la superposition

- d'une solution particulière de (E)
- de la solution générale de l'équation homogène (E0)

<u>Solution particulière de (E)</u> :

- si $s = cte = s_K$ alors (E) admet une solution particulière constante $x_p = K$ qui vérifie

$$cK = s_K$$

$$x_p(t) = \frac{s_K}{c}$$

- si $s = s_m \cos(\omega t)$ alors la solution particulière est également une fonction sinusoïdale de même pulsation :

$$x_p(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

<u>Solution générale de l'équation homogène (E0)</u> :
On associe à (E0) l'équation caractéristique :

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{Tr}$$

qui est un trinôme en r.
Remarque : c'est l'équation qu'on obtiendrait en cherchant des solutions de la forme λe^{rt}, $(\lambda, r) \in \mathbb{R}^2$.

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant de (Tr).

- Si $\Delta > 0$, le trinôme (Tr) admet deux racines réelles r_1 et r_2 telles que $r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
La solution générale de l'équation homogène (E0) est de la forme

$$x_h(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \qquad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

- Si $\Delta = 0$, le trinôme (Tr) admet une racine double $r_0 = -\frac{b}{2a}$
La solution générale de l'équation homogène (E0) est de la forme

$$x_h(t) = (At + B)e^{r_0 t} \qquad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

- Si $\Delta < 0$, le trinôme (Tr) admet deux racines complexes conjuguées r_1 et r_2 telles que

$$r_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} = \alpha \pm i\beta$$

La solution générale de l'équation homogène (E0) est de la forme

$$x_h(t) = e^{\alpha t}(A \cos \beta t + B \sin \beta t) \qquad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

La solution générale de (E) est donc de la forme :

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) = x_p(t) + \begin{cases} Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} & \text{si } \Delta > 0 \\ (At + B)e^{r_0 t} & \text{si } \Delta = 0 \\ e^{\alpha t}(A \cos \beta t + B \sin \beta t) & \text{si } \Delta < 0 \end{cases}$$

On détermine alors les constantes A et B à l'aide des conditions initiales.

Quand a, b et c sont de même signe, on peut montrer que $r_1 < 0$, $r_2 < 0$, $r_0 < 0$ et $\alpha < 0$. On a alors

$$\lim_{t \to \infty} x_h(t) = 0$$

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = x_p(t)$$

La solution de (E) tend vers la solution particulière. On dit qu'on a atteint le régime permanent (ou régime établi).