Analyse dimensionnelle

Ce cours est essentiel dans la pratique quotidienne de la physique. Une vérification systématique de l'homogénéité des résultats obtenus permet souvent de détecter des erreurs.
Pour avoir une approche précise d'un phénomène physique il faut être capable de le décrire quantitativement. Pour cela il faut pouvoir effectuer des mesures des grandeurs physiques qui interviennent. Ces grandeurs physiques mesurées vérifient des lois qui les relient entre elles par des formules mathématiques.
On va donc définir ce qu'est une grandeur physique mesurable et revenir sur la notion de système d'unité. Vous connaissez déjà un certain nombre d'unités de base du système SI.
En séance de travaux pratiques, on reviendra sur la notion d'incertitude de mesure.

I. Grandeur mesurable - Unité de mesure

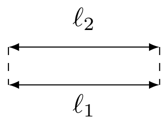
I.1. Grandeur mesurable

Une grandeur est une caractéristique physique d'un système pouvant être mesurée ou repérée (exemple : longueur, masse volumique, température...).

> Une grandeur physique est mesurable si on peut définir pour cette grandeur :
> → une égalité
> → une somme

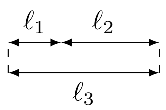
exemple : longueur

égalité



$\ell_1 = \ell_2$

somme



$\ell_3 = \ell_1 + \ell_2$

Une longueur est donc une grandeur mesurable. Si on peut sommer des longueurs alors on peut toujours exprimer une longueur comme multiple d'une autre.

✎ D'après vous, pour quelle grandeur physique la notion de "somme" semble-telle plus difficile à définir ?

I.2. Unité de mesure

> Si une grandeur est mesurable alors on peut choisir pour cette grandeur une unité de mesure.

exemple : unité de longueur
Soit ℓ_0 l'unité de longueur, choisie arbitrairement. Toute longueur s'exprimera sous la forme :

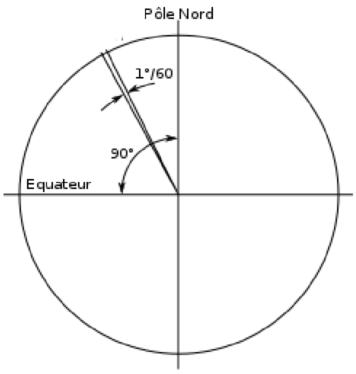
$$\ell = \alpha \ell_0$$

- ℓ a la dimension d'une longueur
- ℓ_0 a la dimension d'une longueur
- α est un nombre réel sans dimension dont la valeur dépend de l'unité choisie.

Ainsi, une grandeur physique de dimension donnée (par exemple une longueur) peut s'exprimer à l'aide de plusieurs unités (le mètre, le cm, le pouce etc...).
Le choix d'unité est arbitraire mais on essaie qu'il soit le plus commode et le plus universel possible.

✎ Quelle est l'actuelle unité SI de longueur ? De quand date-t-elle ? À quelle longueur universelle était-elle reliée ?
L'unité SI de longueur est le mètre. Son origine date de la révolution française. Un mètre correspond à la dix millionième partie du quart de méridien terrestre.

Autre unité de longueur possible : le "mille marin" ou "nautique" souvent appelé "mille nautique". À l'origine, il correspond à la distance parcourue lors d'un déplacement de 1'=1/60°sur un cercle méridien.



✎ En déduire la valeur d'un mille nautique exprimée en kilomètre.

$$90° \leftrightarrow 10000 \text{ km}$$
$$1° \leftrightarrow \frac{10000}{90} \text{ km}$$
$$1/60° \leftrightarrow \frac{10000}{90\times 60} \text{ km} = \frac{100}{54} \text{ km} = 1,852 \text{ km}$$

La longueur du mille nautique est officiellement fixée à 1852 m depuis 1929.

I.3. Lois physiques et unités dérivées

Exemple : on constate que l'accélération a d'un corps est proportionnelle à la force que F l'on exerce sur lui et inversement proportionnelle à sa masse m. Cela se traduit par la relation [1]

$$a = \alpha \frac{F}{m}$$

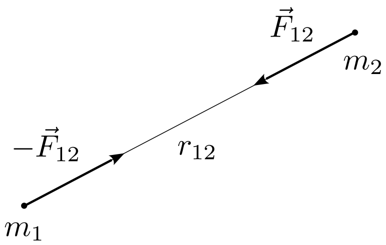
avec α un coefficient multiplicatif.
On choisit $\alpha = 1$ sans dimension. Quelle loi retrouve-t-on ?

Dimensionnellement

$$[F] = [m].[a]$$

où on note $[F]$ pour "dimension de F".
L'unité de force dérive ainsi des unités de masse et d'accélération. Sachant que l'unité SI de force est le newton, relier le newton aux unités de masse (kg), de longueur (m) et de temps (s) du système SI.

Une fois cette unité dérivée fixée, on peut en déduire la valeur d'autres constantes.



La force d'interaction gravitationnelle entre deux masses m_1, m_2 distantes de r_{12} est proportionnelle au produit de leurs masses et inversement proportionnelle à la distance qui les séparent.

$$\|\vec{F}_{12}\| = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$$

en notant G étant la constante multiplicative. On a $G = 6,67.10^{-11}$ SI.
Préciser la valeur de l'unité SI de G en fonction du kilogramme, du mètre, et de la seconde.

$$G = 6,67.10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$$

On aurait tout aussi bien pu choisir $G = 1$ sans dimension pour définir l'unité dérivée de force. Dans ce cas, c'est α qui aurait été dimensionné.

> Le choix d'unité dérivée est arbitraire et il est lié à la valeur des constantes intervenant dans les lois physiques.

1. comme on raisonne uniquement sur les dimensions on indique simplement les normes des vecteurs

I.4. Système d'unités

> Un système cohérent d'unités est constitué d'unités de bases dont dérivent, via des lois physiques toutes les autres unités.

Exemple : en mécanique on a seulement besoin de trois unités de bases associée aux trois dimensions : longueur, masse, temps pour pouvoir définir toutes les autres. On utilise alors L, M et T comme symboles dimensionnels pour représenter respectivement les dimensions d'une longueur, d'une masse [2] et d'un temps.

	L longueur	M masse	T temps
SI	m	kg	s
CGS	cm	g	s
"astronomie"	...	...	...

✎ L'unité d'énergie est le joule dans le système SI et l'erg dans le système CGS. D'anciennes tables indiquent qu'une énergie vaut $E = 3$ erg. Quelle est sa valeur en joule ? On rappelle qu'une énergie est homogène (c'est-à-dire "a les mêmes dimensions") au produit d'une masse par le carré d'une vitesse.

II. Le système international d'unité (SI)

Comme on l'a vu, les choix d'unités s'avèrent multiples ; dans un soucis de simplification et d'universalité, il existe un système international d'unités dans lequel tout physicien normalement constitué devrait s'exprimer. Sinon, les conséquences peuvent être catastrophiques (comme par exemple la perte de la sonde Mars Climate Orbiter en 1999 - https://www.nirgal.net/mco_end.html).

II.1. Les unités de base

Les unités de bases du système SI sont (voir polycopié) :

- la seconde (s)
- le mètre (m)
- le kilogramme (kg)
- l'ampère (A)
- le kelvin (K)
- la mole (mol)
- la candela (cd)

Lors de sa séance publique du 16 novembre 2018, la Conférence Internationale des Poids et Mesures a entériné la redéfinition de quatre unités : kg, A, K, mol. Elles ont officiellement été mises en application le 20 mai 2019.

Les symboles dimensionnels associés à chacune de ces unités sont indiqués dans le tableau ci-dessous :

Grandeur physique de base	*Symbole dimensionnel*	*Unité SI*
Temps	T	s
Longueur	L	m
Masse	M	kg
Intensité électrique	I	A
Température thermodynamique	Θ	K
Quantité de matière	N	mol
Intensité lumineuse	J	cd

2. attention à ne pas confondre M symbole dimensionnel de la masse avec m symbole de l'unité de longueur "mètre")

II.2. Quelques unités dérivées

- Grandeurs géométriques :

Grandeur	*Loi*	*Analyse dimensionnelle*	*Unité SI*
Longueur	grandeur de base	$[\ell] = L$	m (mètre)
Surface	$A = \ell^2$ (carré)	$[A] = L^2$	m^2
Volume	$V = \ell^3$ (cube)	$[V] = L^3$	m^3
Angle	$\overset{\frown}{AB} = R\alpha$	sans dimension	radian

Remarque : l'unité SI de volume est le m^3 et pas le litre (1 L = 1 dm^3 = $(10^{-1}$ m$)^3 = 10^{-3}$ m^3).

- Grandeurs cinématiques :

Grandeur	*Formule*	*Analyse dimensionnelle*	*Unité SI*
Temps	grandeur de base	$[t] = T$	s (seconde)
vitesse	$v = \ell/t$	$[v] = L.T^{-1}$	m.s^{-1}
accélération	$a = v/t$	$[a] = L.T^{-2}$	m.s^{-2}

- Grandeurs dynamiques :

Grandeur	*Formule*	*Analyse dimensionnelle*	*Unité SI*
Masse m	grandeur de base	$[m] = M$	kg (kilogramme)
masse volumique ρ	$\rho = m/V$	$[\rho] = M.L^{-3}$	kg.m^{-3}
quantité de mouvement p	$p = mv$	$[p] = M.L.T^{-1}$	kg.m.s^{-1}
force F	$F = ma$	$[F] = M.L.T^{-2}$	N (newton) = kg.m.s^{-2}
énergie $\mathcal{E}$	$E_c = \frac{1}{2}mv^2$	$[\mathcal{E}] = M.L^2.T^{-2}$	J (joule)= kg.m^2.s^{-2}
puissance $\mathcal{P}$	$\mathcal{P} = \mathcal{E}/t$	$[\mathcal{P}] = M.L^2.T^{-3}$	W (watt)= kg.m^2.s^{-3}
pression P	$P = F/A$	$[P] = M.L^{-1}.T^{-2}$	Pa (pascal)= kg.m^{-1}.s^{-2}
débit massique q_m	$q_m = m/t$	$[q_m] = M.T^{-1}$	kg.s^{-1}

- Grandeurs électriques :

Grandeur	*Formule*	*Analyse dimensionnelle*	*Unité SI*
Intensité i	grandeur de base	$[i] = I$	A (ampère)
charge électrique q	$i = q/t$	$[q] = T.I$	C (coulomb)=A.s
tension U	$\mathcal{P} = Ui$	$[U] = M.L^2.T^{-3}.I^{-1}$	V (volt)= kg.m^2.s^{-3}.A^{-1}
résistance électrique R	$U = Ri$	$[R] = M.L^2.T^{-3}.I^{-2}$	Ω (ohm)= kg.m^2.s^{-3}.A^{-2}
capacité C	$q = CU$	$[C] = M^{-1}.L^{-2}.T^4.I^2$	F (farad)= kg^{-1}.m^{-2}.s^4.A^2
inductance L	$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}Li^2$	$[L] = M.L^2.T^{-2}.I^{-2}$	H (henry)= kg.m^2.s^{-2}.A^{-2}

Bilan :
Les unités SI de toutes les grandeurs mécaniques dérivent des trois unités de base (m,kg,s).
Les unités SI de toutes les grandeurs électromagnétiques dérivent des quatre unités de base (m,kg,s,A).

✎ Quelle dimension du produit $[RC]$ d'une résistance R par une capacité C déduit-on du tableau précédent ?

$$[RC] = \cancel{M}.\cancel{L^2}.T^{-3}.\cancel{I^{-2}}.\cancel{M^{-1}}.\cancel{L^{-2}}.T^4.\cancel{I^2} = T \qquad RC \text{ homogène à un temps}$$

III. Équation aux dimensions

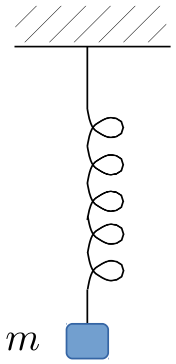
III.1. Décomposition d'une unité dérivée en produit de puissances d'unités de base

Dans le paragraphe 2.2, nous avons vu qu'il était possible de décomposer chaque unité dérivée en un produit de puissances des unités de base.

> Toute unité dérivée s'exprime en fonction d'un produit de puissances d'unités de base.

III.2. Équation aux dimensions

Cette méthode peut permettre, dans certains cas, de déterminer l'expression d'une grandeur physique liée au comportement d'un système en fonction des paramètres connus de ce système, ceci avec pour seul outil l'analyse dimensionnelle.



Exemple : On souhaite déterminer la période T_0 des oscillations verticales d'une masse accrochée à un ressort.
On choisit comme paramètres susceptibles d'influencer cette période :

- la masse m
- k la constante de raideur du ressort (qui a les dimensions d'une force par unité de longueur)
- g l'accélération de la pesanteur

On cherche à exprimer T_0 sous la forme

$$T_0 = C_0\, k^{\alpha}.m^{\beta}.g^{\gamma}$$

avec C_0 une constante sans dimension.

✎ Déterminer, si cela est possible, les coefficients α, β et γ par analyse dimensionnelle.

On peut travailler avec les symboles dimensionnels

$[k] = \dfrac{[F]}{L} = \dfrac{M.L.T^{-2}}{L} = M.T^{-2}$

$[m] = M$

$[g] = L.T^{-2}$

$[T_0] = T$

$$T = M^{\alpha}.T^{-2\alpha}.M^{\beta}.L^{\gamma}.T^{-2\gamma} = M^{\alpha+\beta}.T^{-2\alpha-2\gamma}.L^{\gamma}$$

ou, pour simplifier directement, avec les unités SI :

$[k] = \dfrac{[F]}{L} = \dfrac{\mathrm{kg.m.s^{-2}}}{\mathrm{m}} = \mathrm{kg.s^{-2}}$

$[m] = \mathrm{kg}$

$[g] = \mathrm{m.s^{-2}}$

$[T_0] = s$

$$T = \mathrm{kg}^{\alpha}.\mathrm{s}^{-2\alpha}.\mathrm{kg}^{\beta}.\mathrm{m}^{\gamma}.\mathrm{s}^{-2\gamma} = \mathrm{kg}^{\alpha+\beta}.\mathrm{s}^{-2\alpha-2\gamma}.\mathrm{m}^{\gamma}$$

On égale les exposants de chacune des dimensions de part et d'autre de l'égalité. On obtient un système de trois équations à trois inconnues :

$$\left\{\begin{array}{lcllcl} 1 & = & -2\alpha - 2\gamma & (T) & \text{ou} & (\mathrm{s}) \\ 0 & = & \alpha + \beta & (M) & \text{ou} & (\mathrm{kg}) \\ 0 & = & \gamma & (L) & \text{ou} & (\mathrm{m}) \end{array}\right.$$

On en déduit : $\left\{\begin{array}{lcl} \alpha & = & -\frac{1}{2} \\ \beta & = & \frac{1}{2} \\ \gamma & = & 0 \end{array}\right.$ soit $T_0 = C_0\, k^{-\frac{1}{2}}.m^{\frac{1}{2}}$. Ce qui s'écrit de manière plus photogénique sous la forme :

$$T_0 = C_0\sqrt{\frac{m}{k}}$$

On peut montrer que $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. L'équation aux dimensions ne permet pas de trouver la valeur de la constante multiplicative sans dimension C_0.

III.3. Vérification de l'homogénéité d'un résultat

Une équation $E_1 = E_2$ est **homogène** si les deux membres de l'égalité ont même dimension : $[E_1] = [E_2]$

Vérifier l'homogénéité d'un résultat permet de détecter des erreurs : **un résultat inhomogène est toujours faux**.

Un résultat homogène peut parfois être faux, en général parce qu'on a fait une erreur dans le coefficient multiplicatif sans dimension (*exemple :* $T = \sqrt{\frac{m}{k}}$ et $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ sont deux expressions homogènes à un temps mais seule la deuxième équation correspond à l'expression de la période des oscillations d'une masse m accrochée à un ressort de raideur k).

Pour pouvoir vérifier l'homogénéité d'un résultat, il est indispensable de l'exprimer sous forme littérale. L'application numérique doit être faite après.

Enfin, on ne peut comparer deux grandeurs que si elles ont même dimension (on ne compare pas une longueur avec une masse).

À retenir :

- Tous les termes d'une somme doivent avoir même dimension
- Les arguments des fonctions cos, sin, tan, exp, ln doivent être sans dimension.
- Soit f une grandeur physique fonction d'une autre grandeur physique x. La dimension de la dérivée $f'(x)$ est telle que
$$[f'(x)] = \left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right] = \frac{[f]}{[x]}$$
Justification : $f'(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}$ où x et ε ont même dimension.

Exemples : Dans les expressions suivantes, R_1, R_2 et R_{eq} désignent des résistances électriques, t et τ des temps, v une vitesse, m une masse, H et h des longueurs, p et p_0 des pressions et ρ une masse volumique.

✎ Déterminer si les expressions suivantes sont homogènes ou non :

a) $R_{eq} = 1 + R_1 + R_2$

b) $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

c) $R_{eq} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$

d) $v = 3\frac{h}{t}$

e) $H = h\cos t$

f) $H = \cos\frac{t}{\tau}$

g) $H = h\cos\frac{t}{\tau}$

h) $p = p_0 + \rho g h$

i) $p = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2$

✎ La grandeur physique x, homogène à une longueur, vérifie la relation : $x = X_0\cos\left(\frac{a}{b}\right)$.
Quelle est la dimension de X_0 ? Que peut-on dire des dimensions des grandeurs a et b ? $[X_0] = L$; $[a] = [b]$.

✎ La force de viscosité qui s'exerce sur une couche de surface S au sein d'un fluide s'écrit (voir cours MF3) :

$$F = \eta S \frac{\mathrm{d}v(z)}{\mathrm{d}z}$$

où $v(z)$ est la vitesse du fluide à la hauteur z et η une constante, appelée *viscosité*, caractéristique du fluide.
Quelle est la dimension de η ? $[\eta] = M.L^{-1}.T^{-1}$