

Propagation unidimensionnelle d'un signal

Table des matières

I. Ondes : quelques exemples	2
II. Ondes progressives	4
II.1. Ondes progressives sur une corde	4
a) Observation	4
b) Célérité d'une onde progressive	4
II.2. Expression mathématique d'une onde progressive	5
a) Analyse	5
b) Expression en fonction du retard	6
c) Autre point de vue : translation spatiale du signal	6
III. Onde de tension et de courant dans un câble coaxial	9
III.1. Structure d'un câble coaxial	9
III.2. Établissement de l'équation d'onde	10
III.3. Forme générale des solutions de l'équation d'onde	12
IV. Autres exemples d'équations de d'Alembert unidimensionnelles	13
IV.1. Ondes sur une corde	13
IV.2. Ondes acoustiques	14
V. Onde progressive harmonique	15
V.1. Expression générale	15
V.2. Double périodicité	15
V.3. Notation complexe	17
VI. Ondes stationnaires	18
VI.1. Quelques simulations	18
VI.2. Observation expérimentale : corde de Melde	18
VI.3. Superposition de deux ondes progressives sinusoïdales	20
VI.4. Étude de l'onde stationnaire	20
VI.5. Détermination de la fréquence de modes propres	22
VI.6. Décomposition en modes propres	23
VI.7. Analogie avec des ondes acoustique stationnaires	23

La première image qui apparaît quand on parle d'onde, est celle de la déformation de la surface de l'eau après qu'on y a jeté un caillou. Étymologiquement, onde désigne les vagues (de même en anglais avec le terme wave). Ce sont bien sûr les premières "ondes" connues. Puis progressivement, la collection s'est enrichie, avec les ondes acoustiques, les ondes électromagnétiques... jusqu'aux "ondes de matière" puisque en mécanique quantique on a montré expérimentalement que des électrons (et d'autres particules) pouvaient avoir un comportement ondulatoire. Enfin en septembre 2015 furent détectées les premières ondes gravitationnelles produites par la coalescence de deux trous noirs. Ces ondes étaient prédites par la théorie de la relativité d'Einstein. Après vérification des données, la nouvelle a été révélée au public en février 2016.

I. Ondes : quelques exemples

Les ondes permettent de véhiculer un signal physique.

- onde sur une corde

nature du signal : élongation de la corde

onde 1D ou monodimensionnelle : une seule direction de propagation.

onde transverse : la vibration (ici le déplacement de la corde) s'effectue perpendiculairement à la direction de propagation.

- ondes à la surface de l'eau

nature du signal : écart de hauteur par rapport à la position de repos

onde 2D ou bidimensionnelle : la propagation s'effectue sur une surface

onde transverse

- ondes acoustiques : se propagent dans les fluides (gaz, liquide) et dans les solides (métal, béton).

nature du signal :

– Dans un fluide, l'onde acoustique se traduit par un écart en pression par rapport à la valeur de repos P_0 . La pression de l'air s'écrit alors $P = P_0 + p$ avec p l'écart en pression. $P_0 \simeq 10^5$ Pa alors que p est de l'ordre 10^{-5} Pa à la limite du seuil d'audibilité, et de l'ordre de la dizaine de Pa au seuil de douleur. On a donc toujours donc $p \ll P_0$. Les variations de pression sont liées au déplacement des particules fluides.

– Dans un solide l'onde acoustique se traduit par des oscillations des atomes du réseau cristallin. On modélise l'interaction entre deux atomes par une force élastique représentée par un ressort.

▷ Fréquences audibles : entre 20 Hz et 20 000 Hz

▷ Vitesse de propagation : environ 340 m.s⁻¹ dans l'air à la température ambiante, 1500 m.s⁻¹ dans l'eau, entre 5600 m.s⁻¹ et 5900 m.s⁻¹ dans l'acier.

onde 3D ou tridimensionnelle : la propagation peut s'effectuer dans un volume.

onde longitudinale : la vibration se produit dans une direction parallèle à la direction de propagation.

On peut visualiser la propagation d'une onde acoustique grâce au lien :

<https://www.youtube.com/watch?v=6dIqCQ-WA10>

Le déplacement des "particules" fluides s'effectue dans la direction de propagation de l'onde : les ondes acoustiques sont bien des ondes longitudinales.

Remarque : pour des ondes de surface ou de volume, il se peut qu'une seule variable d'espace intervienne quand l'onde se propage dans une direction donnée.

exemple 1 : onde de surface générée par une barre oscillante, les crêtes forment des droites parallèles entre elles et perpendiculaires à la direction propagation.

exemple 2 : onde acoustique dans un tuyau cylindrique.

- ondes sismiques :

Elles peuvent être longitudinales (ondes P de même nature que les ondes acoustiques) ou transverses (ondes S). Les ondes transverses ne peuvent se propager que dans des solides : ainsi elles ne peuvent pas se propager dans le noyau de fer liquide). Ce sont des ondes 3D. Les ondes P sont les plus rapides ($\simeq 6$ km.s⁻¹) et arrivent donc en premier avant les ondes S ($\simeq 4$ km.s⁻¹) qui arrivent en second...

Il existe aussi des ondes sismiques 2D, ne se déplaçant qu'en surface : les ondes de Love et les ondes de Raileigh.

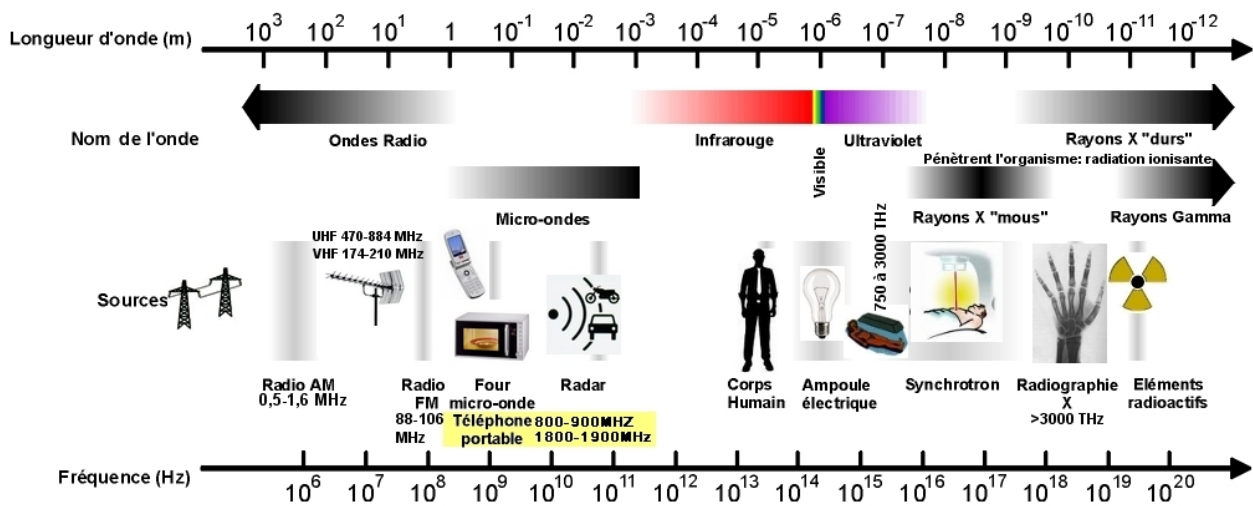
• ondes électromagnétiques :

nature du signal : champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) .

Contrairement aux ondes décrites précédemment, les ondes électromagnétiques peuvent se propager dans le vide.

Vitesse de propagation dans vide : $c = 299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}$. Propagation 3D, structure **transverse** (voir TP sur la polarisation de la lumière).

Les ondes électromagnétiques couvrent un très large spectre de fréquence, dont la lumière visible ($\lambda \in [400 \text{ nm}, 800 \text{ nm}]$) constitue une petite partie.



Spectre des ondes électromagnétiques

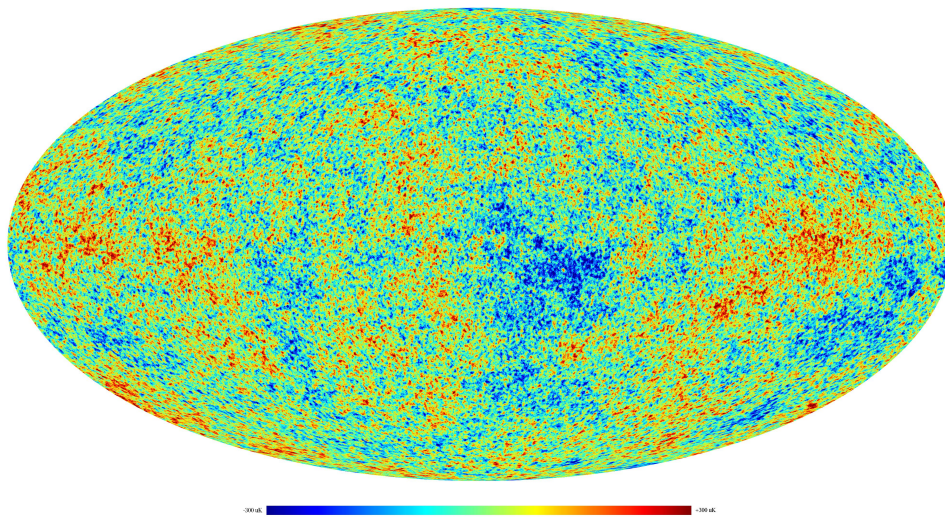


Image du fond cosmologique à 3K satellite Planck

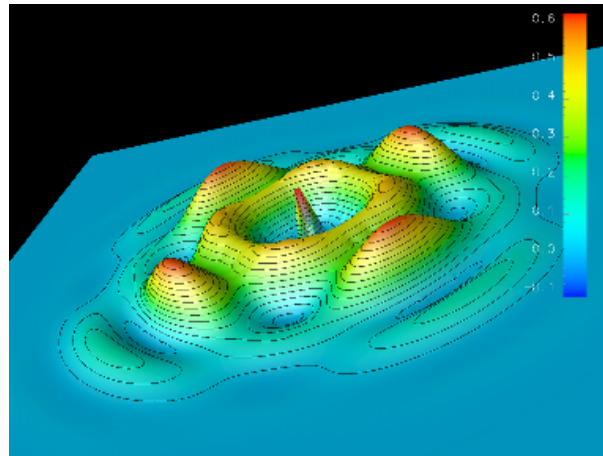
On appelle la loi de Wien : $\lambda_m T = 3 \text{ mm.K}$.

- Rappeler à quoi elle correspond.
- Déterminer la valeur de la longueur d'onde associée à une température de 3 K

- ondes gravitationnelles :

nature du signal : courbure de l'espace-temps (phénomène purement relativiste)

Elles ont une structure transverse et se propagent à la vitesse c .



Simulation numérique d'une onde gravitationnelle créée par l'effondrement gravitationnel d'une étoile

Détecteurs : VIRGO (en Italie) LIGO (Etats-Unis). Première détection historique d'une onde gravitationnelle, produite par la coalescence de deux trous noirs, en décembre 2015

voir le site :

<https://lejournal.cnrs.fr/articles/ondes-gravitationnelles-et-trous-noirs-acte-2>

II. Ondes progressives

II.1. Ondes progressives sur une corde

a) Observation

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Ondes/general/onde_transversale.php

b) Célérité d'une onde progressive

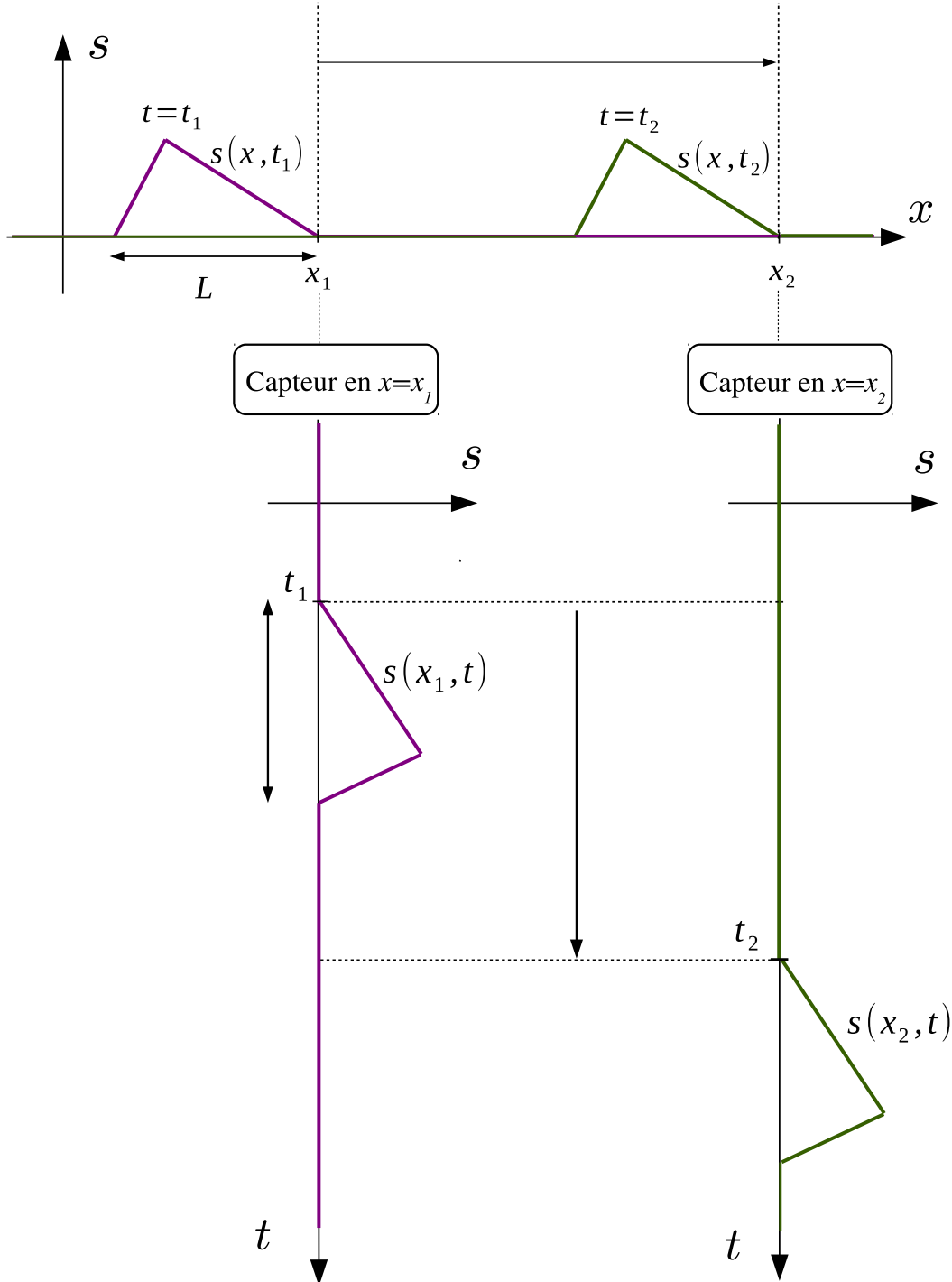
Une **onde** mécanique **progressive** correspond au déplacement sans déformation d'une perturbation d'un milieu sans qu'il y ait transport de matière. Elle permet par contre un transfert d'énergie d'un endroit à un autre.

Une caractéristique essentielle d'une onde progressive est sa vitesse de propagation c (pour célérité). Elle dépend, pour un type d'onde donné, des caractéristiques du milieu de propagation.

II.2. Expression mathématique d'une onde progressive

a) Analyse

On considère la propagation d'une onde à la vitesse c le long de l'axe Ox dans le sens des x croissants. On a deux approches possibles : soit on suit le signal s au cours du temps (en prenant des "photographies" successives), soit on place des capteurs en des points donnés et on y enregistre le signal temporel.



On constate que pour décrire correctement le signal, nous devons utiliser deux variables x et t . On introduit donc la fonction à deux variables :

$$s(x, t)$$

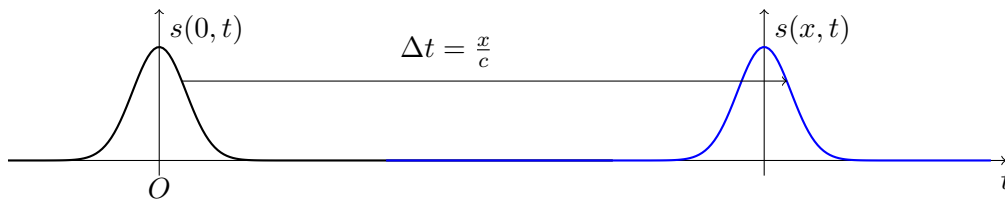
$s(x_0, t)$ correspond à un enregistrement du signal en fonction du temps, en un point d'abscisse x_0 donné

$s(x, t_0)$ correspond à une "photographie" du signal, à un instant t_0 donné.

b) Expression en fonction du retard

Supposons connu le signal en $x = 0$: $s(0, t) = f(t)$.

On se place désormais au point M d'abscisse $x > 0$. Quel signal enregistrera-t-on en ce point ?



Pour se propager de 0 vers M le signal va mettre un temps Δt tel que $x = c\Delta t$. Ainsi $\Delta t = x/c$ représente le retard du signal reçu en M par rapport à celui perçu en O .

Remarque : cette notion de retard lié à la vitesse finie de propagation de l'onde peut être illustrée lors de l'observation des astres : lorsqu'on dit qu'alpha du Centaure est située à 4 AL (Année Lumière) de la Terre, cela signifie qu'elle se situe à une distance parcourue en quatre années par la lumière. Si cette étoile venait à exploser nous ne pourrions en être informés que quatre années plus tard. À ce titre, le soleil est situé à environ 8 min lumière de la Terre...

Le signal reçu en M à l'instant t est le même que le signal émis en 0 à l'instant $t - \Delta t$. L'expression de ce signal sera donc

$$s(x, t) = s(0, t - \Delta t) = s(0, t - \frac{x}{c}) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Toute onde progressive se propageant à la vitesse c dans le sens des x croissants peut s'écrire sous la forme :

$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Inversement, pour une onde se propageant dans le sens des x décroissants, on obtient, en changeant c en $-c$ une expression de la forme :

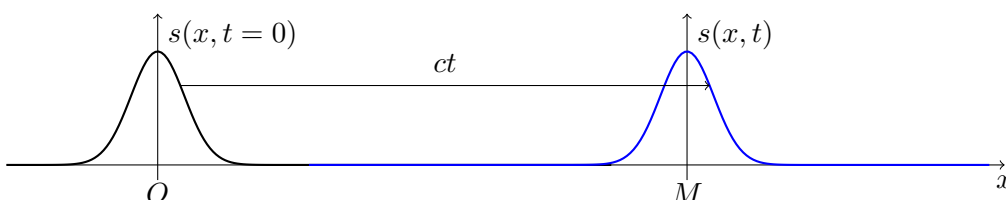
$$s(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

c) Autre point de vue : translation spatiale du signal

On considère un signal se propageant dans le sens des x croissants à la vitesse c .

On a représenté ci-dessous le signal à deux instants différents $t = 0$ et $t > 0$.

On suppose qu'à $t = 0$ le profil du signal est de la forme $s(x, 0) = f(x)$.



Le signal qui se trouve en x à l'instant t se trouvait en $x - ct$ à l'instant $t = 0$. On peut donc écrire

$$s(x, t) = s(x - ct, 0) = f(x - ct)$$

Toute onde progressive se propageant à la vitesse c dans le sens des x croissants pourra donc s'écrire sous la forme $f(x - ct)$.

Inversement en changeant c en $-c$, une onde progressive se propageant dans le sens des x décroissants s'écrira sous la forme $g(x + ct)$.

(voir feuille de calcul SageMath <https://nbviewer.org/url/ats.leboulch.bzh/SageM/OP1.ipynb>)

Retenir :

Une onde progressive se propageant dans le sens des x croissants s'exprime sous deux formes équivalentes :

$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad \text{ou} \quad s(x, t) = f(x - ct)$$

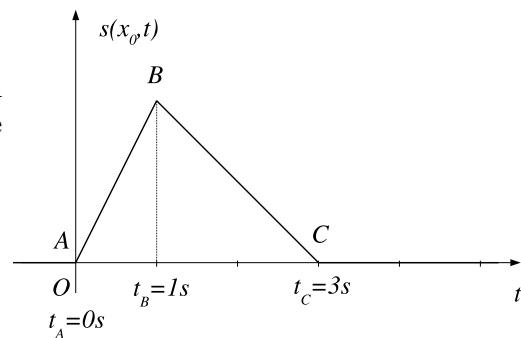
Une onde progressive se propageant dans le sens des x décroissants s'exprime sous deux formes équivalentes :

$$s(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad \text{ou} \quad s(x, t) = g(x + ct)$$

Exercice :

On enregistre le signal en $x_0 = -1$ m : $s(x_0, t)$. On note $c = 2$ m.s⁻¹ la vitesse de propagation de l'onde dans le sens des x croissants.

- 1) Tracer $s(x_1, t)$ pour $x_1 = 1$ m
- 2) Tracer $s(x, t_0)$ pour $t_0 = 5$ s



Réponses :

1) Tracé de $s(x_1, t)$:

Le signal arrivera en $x = x_1$ avec un retard $\Delta t = \Delta x / c = (x_1 - x_0) / c = (1 - (-1)) / 2 = 1$ s.

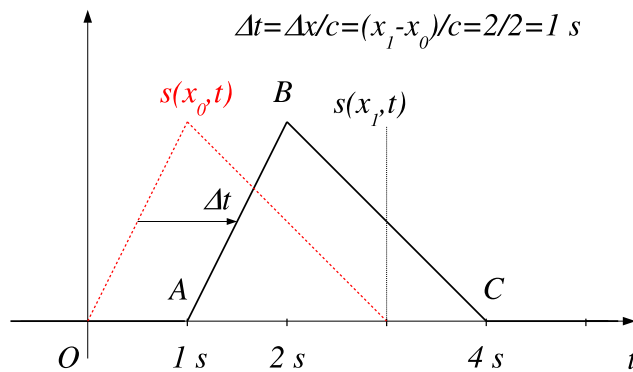
2) Tracé de $s(x, t_0 = 5s)$:

À l'instant t_0 : $x_A = x_0 + c(t_0 - t_A) = -1 + 2 \times (5 - 0) = 9$ m

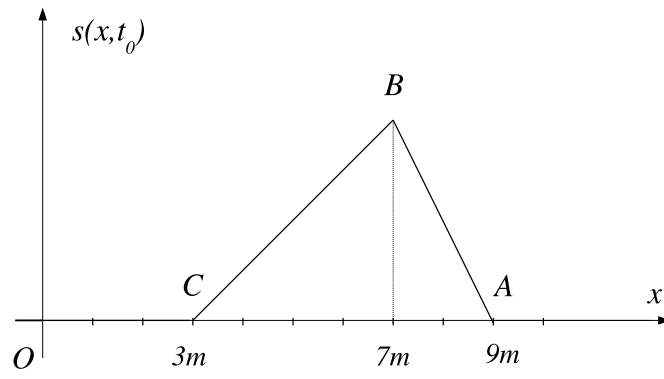
$x_B = x_0 + c(t_0 - t_B) = -1 + 2 \times (5 - 1) = 7$ m

$x_C = x_0 + c(t_0 - t_C) = -1 + 2 \times (5 - 3) = 3$ m

Tracé de $s(x_1, t)$



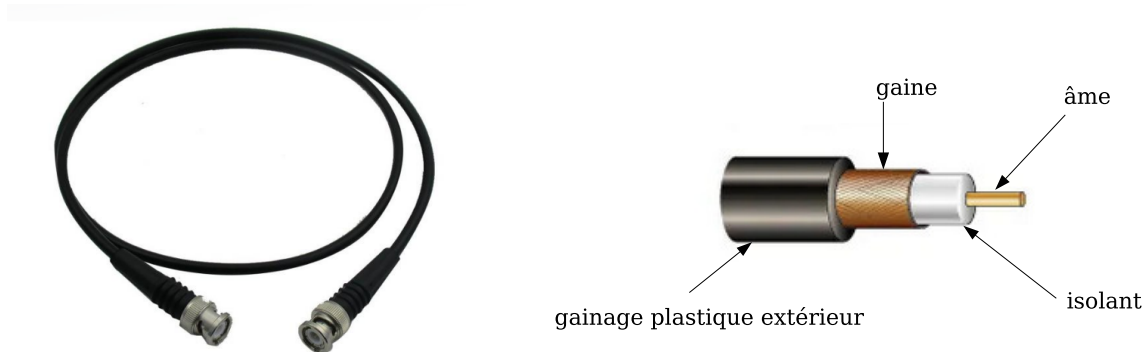
Tracé de $s(x, t_0 = 5s)$:



III. Onde de tension et de courant dans un câble coaxial

III.1. Structure d'un câble coaxial

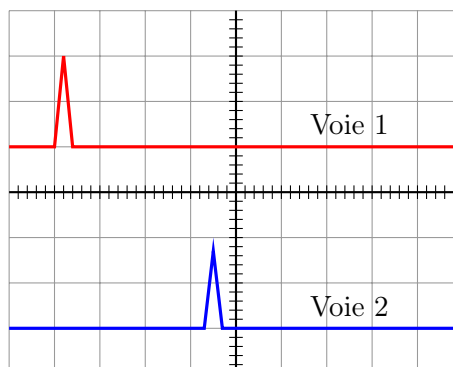
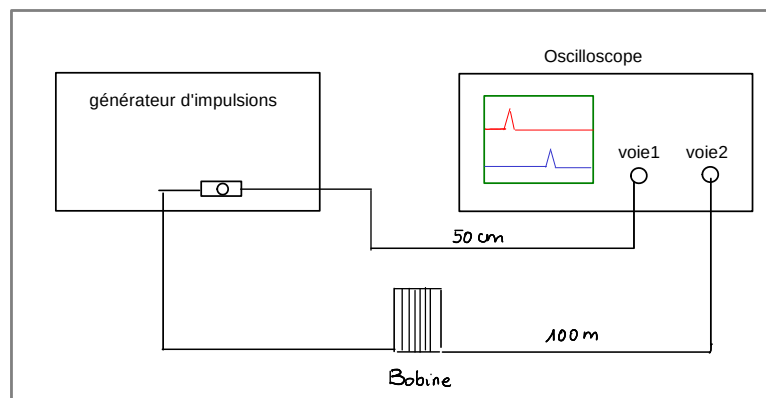
On a déjà utilisé en TP (par exemple avec le moteur de Stirling) des câbles coaxiaux pour prélever des tensions fournies par des capteurs et les envoyer sur l'oscilloscope.



L'**âme** du câble est constituée d'un fil conducteur en cuivre. Un isolant la sépare de la couche conductrice extérieure en cuivre appelée **gaine**. L'ensemble est protégé par un revêtement plastique extérieur.

Quand on relie la sortie d'un GBF à l'entrée d'un oscilloscope via un câble coaxial le signal met un certain temps à se propager. Compte-tenu de la vitesse de propagation (de l'ordre de $c = 3.10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) et de la longueur du câble on peut considérer la transmission quasi-instantanée.

Pour mettre en évidence le retard lié à la propagation on peut utiliser un générateur d'impulsion et visualiser sur la voie 1 de l'oscilloscope le signal ayant transité par un câble de longueur 50 cm et sur la voie 2 le signal ayant transité par une bobine de câble de longueur 100 m.



En supposant que la vitesse de propagation du signal soit de l'ordre de $c = 3.10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ calculer l'ordre de grandeur du décalage temporel entre les deux signaux.

III.2. Établissement de l'équation d'onde

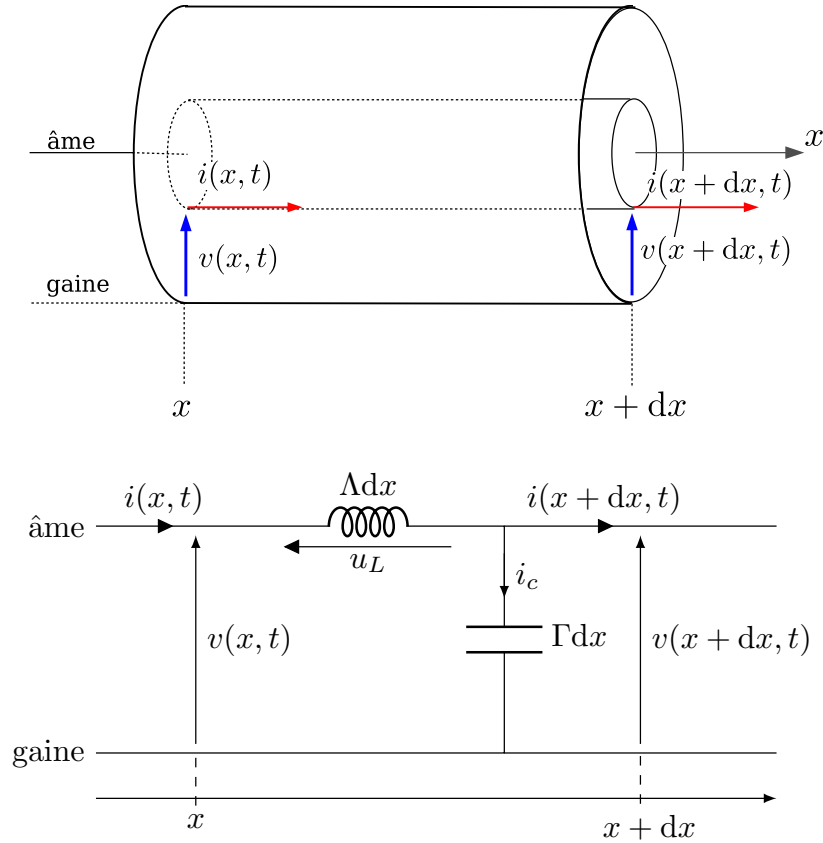
On modélise le câble coaxial comme une ligne présentant une capacité par unité de longueur¹ Γ et une inductance par unité de longueur Λ .

Donner les unités SI de Γ et Λ :

$$[\Gamma] = \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$[\Lambda] = \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$$

On néglige les pertes, donc aucune résistance n'apparaît dans le modèle.



On exprime la tension u_L aux bornes de l'inductance : $u_L = \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t}(x, t)$.

$$v(x, t) = v(x + dx, t) + u_L$$

$$u_L = v(x, t) - v(x + dx, t) = \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t}(x, t)$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x}(x, t) dx = \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t}(x, t)$$

$$\boxed{-\frac{\partial v}{\partial x}(x, t) = \Lambda \frac{\partial i}{\partial t}(x, t)} \quad (\text{E1})$$

On exprime l'intensité dans la branche du condensateur : $i_c = \Gamma dx \frac{\partial v}{\partial t}(x + dx, t)$.

$$i(x, t) = i(x + dx, t) + i_c$$

$$i_c = i(x, t) - i(x + dx, t) = \Gamma dx \frac{\partial v}{\partial t}(x + dx, t)$$

1. On a calculé dans le cours EM2 la capacité par unité de longueur d'un câble coaxial.

$$-\frac{\partial i}{\partial x}(x, t)dx = \Gamma dx \frac{\partial v}{\partial t}(x + dx, t)$$

On approxime $\frac{\partial v}{\partial t}(x + dx, t) \simeq \frac{\partial v}{\partial t}(x, t)$.

En effet : $\frac{\partial v}{\partial t}(x + dx, t) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}(x, t)dx$ et on néglige le terme en dx .

Ainsi :

$$-\frac{\partial i}{\partial x}(x, t)dx = \Gamma dx \frac{\partial v}{\partial t}(x, t)$$

$$\boxed{-\frac{\partial i}{\partial x}(x, t) = \Gamma \frac{\partial v}{\partial t}(x, t)} \quad (\text{E2})$$

On obtient deux équations aux dérivées partielles couplées.

• **Équation vérifiée par l'intensité $i(x, t)$**

On dérive (E2) par rapport à x

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}(x, t) = \Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}(x, t)$$

On dérive (E1) par rapport à t

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}(x, t) = \Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}(x, t)$$

D'après le **théorème de Schwarz** on peut intervertir l'ordre des dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}(x, t)$$

Ainsi

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}(x, t) = \Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}(x, t) = \Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}(x, t) = -\Gamma \Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}(x, t)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}(x, t) - \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}(x, t) = 0}$$

• **Équation vérifiée par la tension $v(x, t)$**

On dérive (E1) par rapport à x

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) = \Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}(x, t)$$

On dérive (E2) par rapport à t

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}(x, t) = \Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t)$$

D'après le théorème de Schwarz on peut intervertir l'ordre des dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}(x, t)$$

Ainsi

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) = \Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}(x, t) = \Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}(x, t) = -\Lambda \Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) - \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t) = 0}$$

On retrouve la même équation aux dérivées partielles que pour l'intensité. Cette équation est appelée **équation d'onde** ou **équation de D'Alembert**.

III.3. Forme générale des solutions de l'équation d'onde

Vérifions que les ondes progressives rencontrées précédemment sont solutions de l'équation de d'Alembert.

Ondes progressives se propageant dans le sens des $x \nearrow$:

Elles ont pour expression générale : $f(x, t) = f(x - ct)$.

Si f est solution de l'équation de d'Alembert, elle doit vérifier :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) - \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) = 0$$

On pose $f(x, t) = f(x - ct) = f(u)$ avec $u = x - ct$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{du}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{du^2} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d^2 f}{du^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{df}{du}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -c \frac{d^2 f}{du^2} \frac{\partial u}{\partial t} = (-c)^2 \frac{d^2 f}{du^2} = c^2 \frac{d^2 f}{du^2}$$

Ainsi l'équation,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) - \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) = 0$$

devient

$$\frac{d^2 f}{du^2} - \Lambda \Gamma c^2 \frac{d^2 f}{du^2} = 0$$

$$\forall u \quad \frac{d^2 f}{du^2} (1 - \Lambda \Gamma c^2) = 0$$

$f(u) = f(x - ct)$ sera solution de l'équation d'onde si

$$1 - \Lambda \Gamma c^2 = 0$$

$$\Lambda \Gamma = \frac{1}{c^2}$$

On peut donc réécrire l'équation d'onde sous la forme :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{1}{c^2} = \Lambda \Gamma$$

On peut vérifier de même que $g(x + ct)$ est également solution de l'équation de d'Alembert (on change c en $-c$ et comme $(-c)^2 = c^2$, $g(x + ct)$ vérifie bien la même relation.

Ainsi, les solutions de l'équation d'onde unidimensionnelle $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ peuvent s'écrire comme la superposition de deux ondes progressives se propageant dans des directions opposées :

$$v(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad \text{avec } \Lambda\Gamma = \frac{1}{c^2} \quad \text{soit } c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$$

Retenir :

L'équation de d'Alembert unidimensionnelle (ou équation d'onde) est une équation aux dérivées partielles (EDP) de la forme :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

où $v(x, t)$ correspond à un signal physique et où c est homogène à une vitesse.

Cette équation est linéaire. Les solutions de l'équation d'onde unidimensionnelle peuvent s'écrire comme la superposition de deux ondes progressives se propageant à la vitesse c dans des directions opposées :

$$v(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

L'équation obtenue pour $v(x, t)$ dans le cas du câble coaxial,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \Lambda\Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

permet, par analogie avec l'équation d'onde

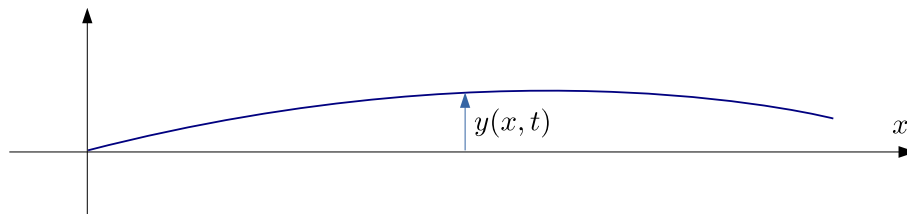
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,$$

d'exprimer la vitesse de propagation c

$$\frac{1}{c^2} = \Lambda\Gamma \quad c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}.$$

IV. Autres exemples d'équations de d'Alembert unidimensionnelles

IV.1. Ondes sur une corde



On peut établir, en appliquant le principe fondamental de la dynamique à un tronçon de corde, que l'élongation $y(x, t)$ vérifie la relation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

avec μ la masse linéique de la corde (= masse par unité de longueur) et T la tension exercée aux extrémités de la corde.

Exprimer la célérité de l'onde. Vérifier l'homogénéité de la valeur obtenue.

IV.2. Ondes acoustiques

On peut établir l'équation d'onde 1D vérifiée par la surpression acoustique $p(x, t)$ associée à une onde sonore dans l'air :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

où ρ_0 est la masse volumique de l'air au repos et $\chi_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S$ le coefficient de compressibilité isentropique de l'air.

- Exprimer la célérité de l'onde. Vérifier l'homogénéité de la valeur obtenue.
- En assimilant l'air à un gaz parfait, exprimer la célérité de l'onde en fonction de R la constante des gaz parfait, T la température de l'air, M sa masse volumique et γ le coefficient isentropique.
- Estimer la vitesse de propagation du son dans l'air dans les conditions usuelles de température et de pression.

V. Onde progressive harmonique

V.1. Expression générale

Considérons par exemple, une onde se propageant sur une corde. On note $y(x, t)$ l'élongation de la corde par rapport à la position de repos.

Pour une onde progressive harmonique (= sinusoïdale) se propageant dans le sens des x croissants à la vitesse c on écrira

$$y(x, t) = y_m \cos(k(x - ct) + \varphi)$$

avec k homogène à l'inverse d'une longueur (l'argument du cosinus devant être sans dimension). On en déduit

$$y(x, t) = y_m \cos(kx - \omega t + \varphi) \text{ avec } \omega = ck$$

V.2. Double périodicité

En x_0 donné le signal présente une période temporelle telle que

$$y(x_0, t) = y(x_0, t + T)$$

$$y_m \cos(kx_0 - \omega t + \varphi) = y_m \cos(kx_0 - \omega(t + T) + \varphi)$$

$$y_m \cos(kx_0 - \omega t + \varphi) = y_m \cos(kx_0 - \omega t - \omega T + \varphi)$$

La fonction *cosinus* étant périodique de période 2π on en déduit : $\omega T = 2\pi$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

À t_0 donné, le signal présente une périodicité spatiale λ , appelée longueur d'onde, telle que

$$y(x + \lambda, t_0) = y(x, t_0)$$

$$y_m \cos(k(x + \lambda) - \omega t_0 + \varphi) = y_m \cos(kx - \omega t_0 + \varphi)$$

$$y_m \cos(kx + k\lambda - \omega t_0 + \varphi) = y_m \cos(kx - \omega t_0 + \varphi)$$

La fonction *cosinus* étant périodique de période 2π on en déduit : $k\lambda = 2\pi$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad k \text{ est appelé } \textit{pulsation spatiale}$$

λ et T sont liés car $\omega = ck$. On en déduit $\frac{2\pi}{T} = c \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\text{d'où } \lambda = cT = \frac{c}{f}$$

Retenir :

La **longueur d'onde** λ est égale à la distance parcourue par l'onde pendant la durée T d'une période.

$$\lambda = cT = \frac{c}{f}$$

Pour le retrouver, il n'est pas nécessaire de faire de calcul. On peut le visualiser grâce à des animations. Par exemple :

<http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/ondeprog.html>

L'expression de $y(x, t)$ peut ainsi s'écrire sous la forme :

$$y(x, t) = y_m \cos(kx - \omega t + \varphi) = y_m \cos \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) + \varphi \right]$$

Retenir :

Le signal

$$y(x, t) = y_m \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

correspond à l'expression générale d'une onde progressive harmonique, d'amplitude y_m , de **période** $T = \frac{2\pi}{\omega}$, de **longueur d'onde** $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ se propageant à la **vitesse** $c = \frac{\omega}{k}$ dans le sens des x croissants.

Remarque : les expressions suivantes

$$y(x, t) = y_m \cos(\omega t - kx + \phi) \quad (\text{on peut vérifier que } \phi = -\varphi)$$

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \psi) \quad (\text{on peut vérifier que } \psi = \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$y(x, t) = y_m \sin(\omega t - kx + \Psi) \quad (\text{on peut vérifier que } \Psi = -\varphi + \frac{\pi}{2}),$$

peuvent également être utilisées pour décrire une onde progressive harmonique de mêmes caractéristiques.

Les expressions précédentes sont transposables à des ondes progressives harmoniques se propageant dans le sens des x décroissants. Ainsi :

$$y(x, t) = y_m \cos(kx + \omega t + \varphi)$$

est l'expression d'une onde progressive harmonique se propageant dans le sens des x décroissants.

Écrire une expression équivalente :

$$y(x, t) = y_m \sin(kx + \omega t + \psi) \text{ avec } \psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

Pour s'entraîner :

Déterminer le sens de propagation, la longueur d'onde, la fréquence et la vitesse de propagation des ondes harmoniques suivantes dont les expressions sont fournies ci-dessous en unités SI :

$$- y(x, t) = y_m \sin(3\pi x - 50\pi t + \frac{\pi}{3})$$

$$\text{Expression de la forme } y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \frac{\pi}{3})$$

Propagation dans le sens des x croissants.

$$k = 3\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \lambda = \frac{2}{3} \text{ m} = 0,67 \text{ m}$$

$$\omega = 50\pi = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad f = 25 \text{ Hz}$$

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{50\pi}{3\pi} = \frac{50}{3} = 17 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$- y(x, t) = y_m \cos(100\pi t + 5\pi x - \frac{2\pi}{3})$$

Expression de la forme $y(x, t) = y_m \cos(\omega t + kx - \frac{2\pi}{3})$

Propagation dans le sens des x décroissants.

$$k = 5\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \lambda = \frac{2}{5} \text{ m} = 0,40 \text{ m}$$

$$\omega = 100\pi = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad f = 50 \text{ Hz}$$

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{100\pi}{5\pi} = \frac{50}{2} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

V.3. Notation complexe

On peut associer au signal $y(x, t) = y_m \cos(kx - \omega t + \varphi)$ la grandeur complexe :

$$\underline{y}(x, t) = y_m e^{j(kx - \omega t + \varphi)} = \underline{y}_m e^{j(kx - \omega t)} \quad \text{avec } \underline{y}_m = y_m e^{j\varphi} \quad \text{et } y(x, t) = \text{Re}(\underline{y}(x, t))$$

Remarque :

On peut aussi écrire $y(x, t) = y_m \cos(kx - \omega t + \varphi) = y_m \cos(\omega t - kx - \varphi)$. On pourrait tout aussi bien poser :

$$\underline{y}(x, t) = y_m e^{j(\omega t - kx - \varphi)} = \underline{y}_m e^{j(\omega t - kx)} \quad \text{avec } \underline{y}_m = y_m e^{-j\varphi}$$

VI. Ondes stationnaires

On a considéré jusqu'à présent une propagation des ondes dans un milieu illimité. Lorsque les ondes atteignent les frontières du domaines de propagation, elles donnent naissance à des ondes réfléchies qui se superposent aux ondes incidentes.

VI.1. Quelques simulations

- réflexion d'une onde

https://nbviewer.org/url/ats.leboulch.bzh/SageM/reflexion_impulsion.ipynb

https://nbviewer.org/url/ats.leboulch.bzh/SageM/reflexion_totale.ipynb

Lorsque l'onde atteint une extrémité fixe de la corde elle donne naissance à une onde réfléchie. Dans ce cas la réflexion se fait avec inversion du signal.

- superposition de deux signaux

<https://nbviewer.org/url/ats.leboulch.bzh/SageM/OP2.ipynb>

Sur cette première feuille de calcul, on superpose (*i.e* on additionne) deux signaux de profils inversés se propageant dans deux directions opposées (on peut imaginer une déformation sur une corde). À un moment les deux signaux s'annulent avant de se séparer à nouveau.

- superposition de deux ondes sinusoïdales progressives, de même amplitude et de même pulsation, se propageant dans des directions opposées.

<https://nbviewer.org/url/ats.leboulch.bzh/SageM/OP3.ipynb>

Sur cette seconde feuille de calcul, on superpose deux ondes progressives sinusoïdales de même amplitude et de même pulsation qui se propagent à la même vitesse dans des directions opposées :

$$y_1(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2(x, t) = y_m \sin(kx + \omega t + \varphi)$$

On n'observe plus de propagation : on parle alors **d'onde stationnaire**.

Contrairement à une onde progressive sinusoïdale, **l'amplitude des oscillations dépend du point où on se place** : on constate alors que certains points restent toujours immobiles (on les appelle des **nœuds** de vibration), alors que d'autres oscillent avec une amplitude maximale (on les appelle des **ventres** de vibration). **L'écart entre deux nœuds successifs (ou entre deux ventres successifs) correspond à une demi-longueur d'onde des ondes progressives initiales.**

L'écart entre un nœud et un ventre successifs correspond à un quart de longueur d'onde des ondes progressives initiales.

VI.2. Observation expérimentale : corde de Melde

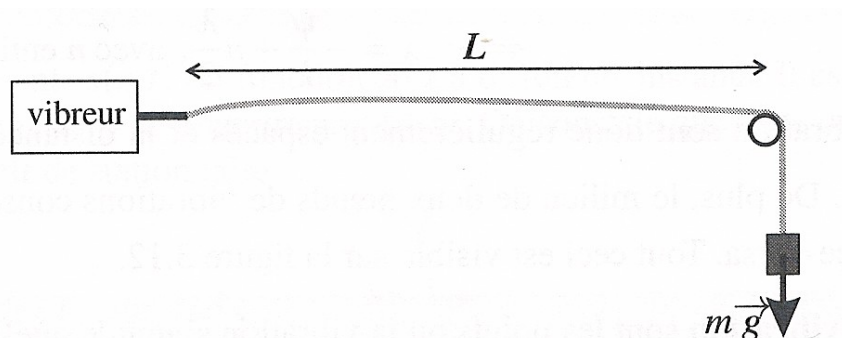
La corde de Melde est une corde tendue fixée à ses deux extrémités (typiquement une corde de guitare).

Elle peut fonctionner

- en mode libre : on pince la corde et on la laisse ensuite vibrer. Compte tenu des frottements avec l'air, la vibration s'atténue progressivement (exemple : corde de guitare, de piano...).
- en mode forcé : on entretient les oscillations en fournissant de l'énergie. Cela permet d'observer des oscillations entretenues, les pertes énergétiques liées au frottement avec l'air étant compensées par l'apport d'énergie due au vibreur (exemple : corde de violon, l'énergie étant fournie par le frottement de l'archet sur la corde).

Expérience

Le dispositif expérimental que l'on va utiliser est constitué d'une corde tendue à l'aide d'une masse accrochée à une de ses extrémités. De l'autre côté un vibreur fait osciller de point d'attache avec une amplitude très faible.



On met en marche le vibreur et on observe... en général pas grand chose au départ. Cependant si on modifie la fréquence du vibreur, on constate que **pour certaines fréquences** une onde stationnaire apparaît : c'est le phénomène de **résonance**.

L'amplitude des oscillations du vibreur étant très faible devant l'amplitude de vibration maximale de la corde à la résonance, on peut considérer que l'extrémité de la corde reliée au vibreur est fixe.

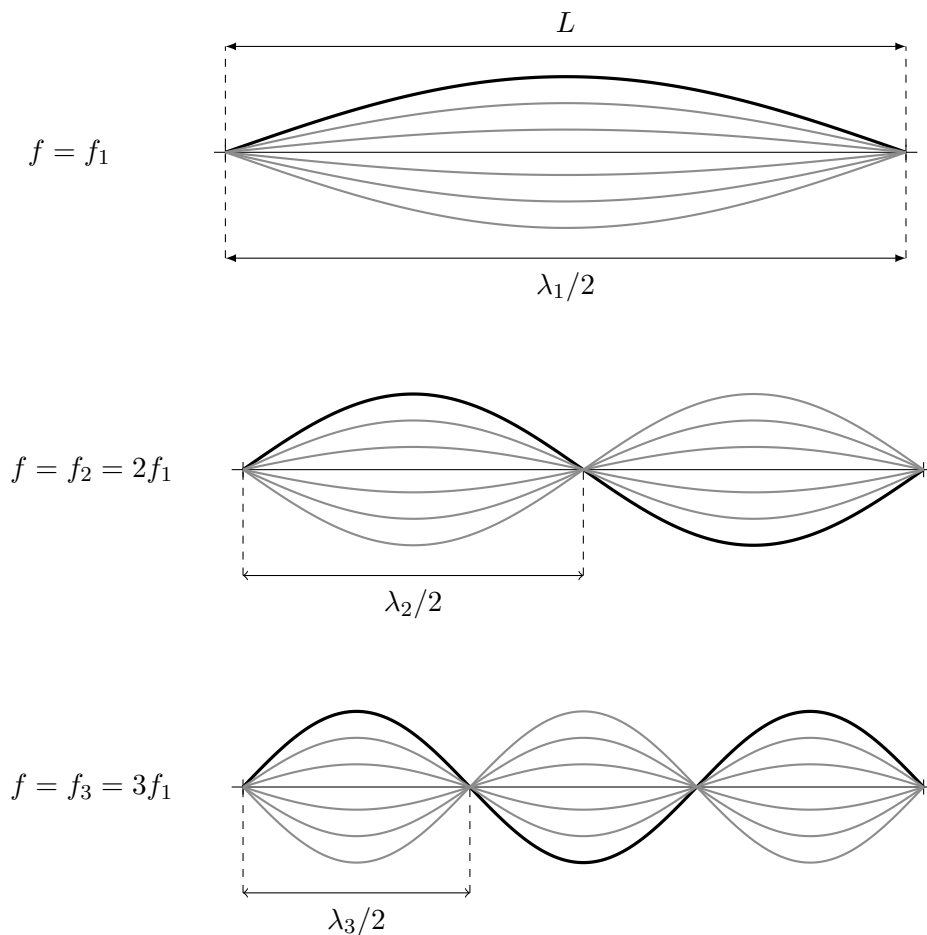
On peut visualiser l'expérience sur le site :

<http://alain.lerille.free.fr/Medias/video/CordeMelde.mp4>

ainsi que l'animation

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Ondes/ondes_stationnaires/melde.php

Pour la fréquence la plus basse, notée f_1 , on observe :



etc...

On constate que la corde n'entre en vibration que pour certaines fréquences dites **fréquences propres** ou **fréquences de résonance**.

Ces fréquences sont des multiples de f_1 dite fréquence fondamentale.

Les différentes configurations associées sont appelées **modes propres** de vibration de la corde.

VI.3. Superposition de deux ondes progressives sinusoïdales

L'équation d'onde (équation de d'Alembert) est une équation linéaire. La superposition de deux solutions de cette équation est encore solution de l'équation d'onde.

On superpose deux ondes progressives de même pulsation, de même amplitude, se propageant dans des directions opposées :

$$\begin{cases} y_1(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \varphi_1) \\ y_2(x, t) = y_m \sin(kx + \omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_1(x, t) + y_2(x, t) \\ &= y_m [\sin(kx - \omega t + \varphi_1) + \sin(kx + \omega t + \varphi_2)] \end{aligned}$$

en utilisant la relation trigonométrique : $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ on obtient

$$\begin{aligned} y(x, t) &= 2y_m \sin \left(kx + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) \cos \left(-\omega t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right) \\ &= 2y_m \sin \left(kx + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) \cos \left(\omega t + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right) \end{aligned}$$

En posant $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \varphi$, $\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \psi$ et $2y_m = y_0$, on obtient

$$y(x, t) = y_0 \sin(kx + \varphi) \cos(\omega t + \psi)$$

Lorsqu'on observe le résultat, on constate que la fonction $y(x, t)$ obtenue s'exprime comme un produit d'une fonction de x par une fonction de t (en l'occurrence ici des fonctions sinusoïdales).

De manière générale quand une fonction s'exprime sous la forme $\mathbf{y}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mathbf{g}(\mathbf{t})$, on dit que c'est une fonction à variables séparées. Ce n'est plus une expression de la forme $y(x, t) = f(x \pm ct)$.

On n'observe plus de propagation. Cela correspond à une **onde stationnaire**.

Retenir :

La superposition de deux ondes progressives sinusoïdales de même amplitude et de même pulsation se propageant dans des directions opposées génère une **onde stationnaire** qui peut s'exprimer sous la forme :

$$y(x, t) = y_0 \sin(kx + \varphi) \cos(\omega t + \psi) \quad \text{avec } \omega = ck$$

Remarque : Les expressions suivantes sont équivalentes :

$$y(x, t) = y_0 \sin(kx + \varphi) \sin(\omega t + \Psi)$$

$$y(x, t) = y_0 \cos(kx + \phi) \cos(\omega t + \psi)$$

$$y(x, t) = y_0 \cos(kx + \phi) \sin(\omega t + \Psi)$$

avec $\phi = \varphi - \frac{\pi}{2}$ et $\Psi = \psi + \frac{\pi}{2}$.

VI.4. Étude de l'onde stationnaire

On considère l'expression générale

$$y(x, t) = y_0 \sin(kx + \varphi) \cos(\omega t + \psi) \quad \text{avec } \omega = ck$$

L'amplitude de vibration dépend du point où on se trouve : elle est maximale au niveau d'un **ventre de vibration** et nulle au niveau d'un **nœud de vibration**.

L'amplitude $\mathcal{A}(x)$ de la vibration en x donné vaut $\mathcal{A}(x) = |y_0 \sin(kx + \varphi)|$.

nœuds de vibration : $\mathcal{A}(x) = 0$ pour $x = x_n$ tel que $\sin(kx_n + \varphi) = 0$ soit pour :

$$kx_n + \varphi = p\pi \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z}$$

$$x_n = x_n^p \text{ tel que } x_n^p = p \frac{\pi}{k} - \frac{\varphi}{k} \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z}$$

or $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ d'où

$$x_n^p = p \frac{\pi\lambda}{2\pi} - \frac{\varphi}{2\pi} \lambda \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z}$$

$$x_n^p = p \frac{\lambda}{2} - \frac{\varphi}{2\pi} \lambda \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z}$$

La distance entre deux nœuds successifs vaut : $x_n^{p+1} - x_n^p = \frac{\lambda}{2}$.

ventres de vibration : $\mathcal{A}(x) = y_0$ pour $x = x_v$ tel que $\sin(kx_v + \varphi) = \pm 1$ soit pour :

$$kx_v + \varphi = \frac{\pi}{2} + p\pi \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z}$$

$$x_v = x_v^p \text{ tel que } x_v^p = \frac{\pi}{2k} + p \frac{\pi}{k} - \frac{\varphi}{k} \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z}$$

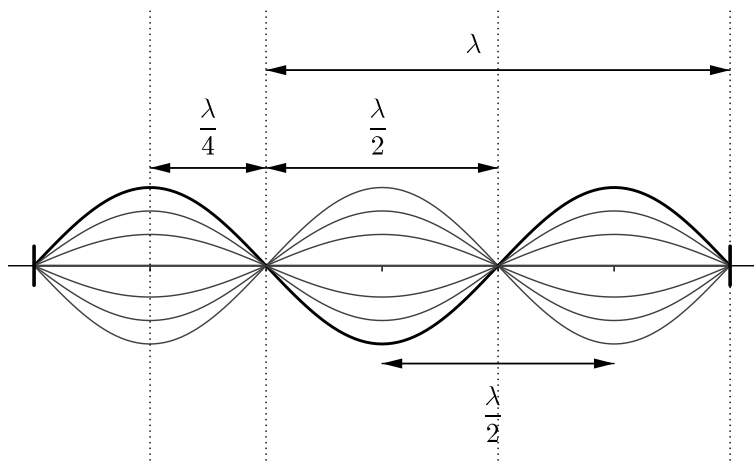
or $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ d'où

$$x_v^p = \frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{2\pi} + p \frac{\pi\lambda}{2\pi} - \frac{\varphi}{2\pi} \lambda \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z}$$

$$x_v^p = \frac{\lambda}{4} + p \frac{\lambda}{2} - \frac{\varphi}{2\pi} \lambda \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z}$$

La distance entre deux ventres successifs vaut : $x_v^{p+1} - x_v^p = \frac{\lambda}{2}$.

La distance entre un nœud et un ventre successifs vaut : $x_v^p - x_n^p = \frac{\lambda}{4}$.



Pour une **onde stationnaire**, l'amplitude de vibration dépend du point où on se trouve : elle est maximale au niveau d'un **ventre de vibration** et nulle au niveau d'un **nœud de vibration**.

- Deux nœuds de vibration consécutifs sont distants de $\lambda/2$.
- Deux ventres de vibration consécutifs sont distants de $\lambda/2$.
- Un nœud et un ventre consécutifs sont distants de $\lambda/4$.

où λ est la longueur d'onde de l'onde harmonique progressive de même pulsation que l'onde stationnaire.

VI.5. Détermination de la fréquence de modes propres

On considère une corde de longueur L fixée à ses extrémités (par exemple une corde de guitare).

La limitation spatiale de l'onde entraîne une quantification des fréquences : seul un nombre discret de fréquences peuvent exister.

Les valeurs des fréquences propres dépendent directement des conditions aux limites imposées à la corde.

On cherche à déterminer les fréquences des différents modes propres observés.

Pour cela, on utilise les propriétés de l'onde stationnaire :

- deux nœuds successifs sont distants d'une demi-longueur d'onde
- un nœud et un ventre successifs sont distants d'un quart de longueur d'onde.

La corde de Melde étant fixée à ses deux extrémités : ces deux dernières doivent coïncider avec des nœuds de vibration. Or deux nœuds de vibration sont au moins distants d'une demi longueur d'onde.

On aura

- pour le mode 1 : $L = \frac{\lambda_1}{2}$
- pour le mode 2 : $L = 2\frac{\lambda_2}{2}$
- pour le mode 3 : $L = 3\frac{\lambda_3}{2}$

L doit donc vérifier la condition, pour un mode n donné :

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*$$

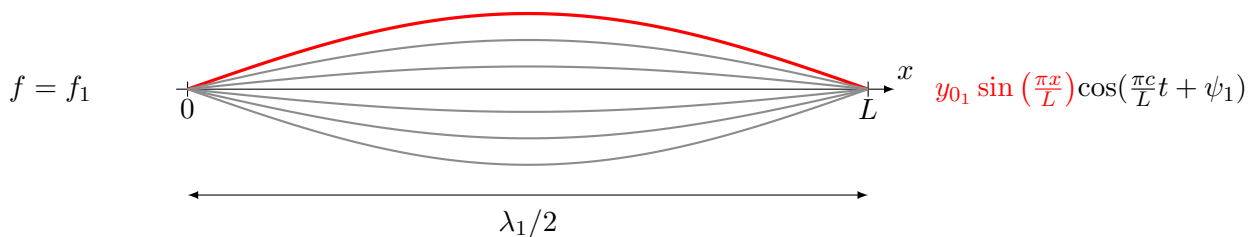
On peut alors en déduire les fréquences possibles, puisque $\lambda_n = cT_n = \frac{c}{f_n}$:

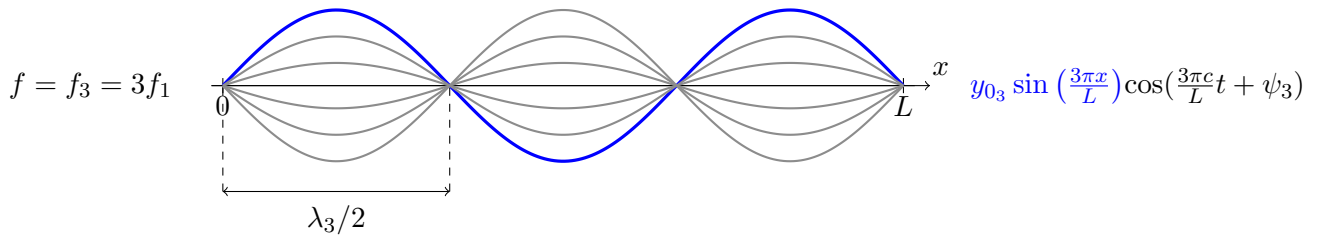
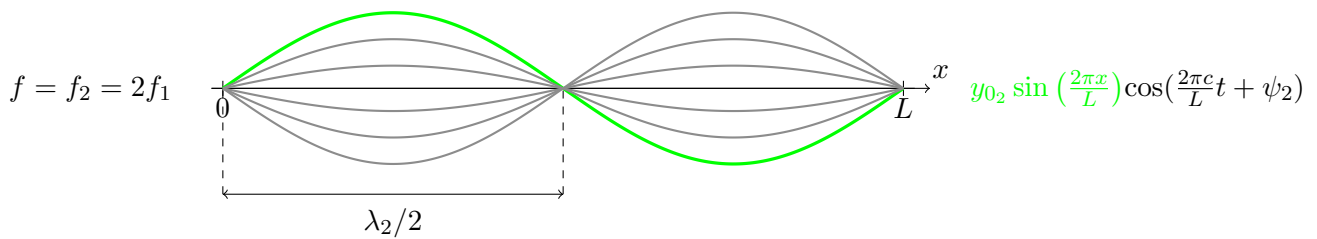
$$L = n \frac{c}{2f_n}$$

On aura donc vibration pour les fréquences f vérifiant :

$$f_n = n \frac{c}{2L} = nf_1 \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*$$

avec $f_1 = \frac{c}{2L}$ fréquence du mode fondamental.





VI.6. Décomposition en modes propres

Quand on pince une corde, on a peu de chance d'exciter un unique mode. En réalité la vibration de la corde résulte de la **superposition** des différents modes. On peut, sous certaines conditions, éviter d'exciter certains modes suivant l'endroit où on pince la corde.

Le signal s'exprimera donc de manière générale sous la forme :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n} \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \cos\left(n \frac{\pi c}{L} t + \psi_n\right)$$

Les valeurs des amplitudes y_{0n} et des phases initiales φ_n peuvent se déduire des conditions initiales en position et en vitesse de la corde, grâce à l'analyse de Fourier.²

Les différentes valeurs des y_{0n} indiquent comment se répartissent les différentes harmoniques dans le spectre. L'importance relative des différentes harmoniques est liée au timbre.

Le spectre est en fait plus complexe : il dépend du temps.

VI.7. Analogie avec des ondes acoustique stationnaires

Pour obtenir des ondes acoustiques 1D on peut utiliser un tuyau. Ce dernier étant de longueur L finie, les ondes acoustiques devront s'établir en milieu limité.

La plupart des instruments à vent sont constitués d'un tuyau cylindrique avec des extrémités ouvertes ou fermées.

Lorsque l'extrémité du tuyau est ouverte, la pression imposée est la pression atmosphérique P_0 , la surpression sera donc nulle.

Par contre la vitesse de déplacement des "particules fluides" aura une amplitude maximale.

L'extrémité d'un tuyau ouvert correspond à un nœud de surpression.

Lorsque l'extrémité du tuyau est fermée, le mouvement des particules fluides est nul (on a donc un nœud en pour la vitesse de déplacement des particules fluides) et on admettra que l'amplitude de la surpression est maximale.

L'extrémité d'un tuyau fermé correspond à un ventre de surpression.

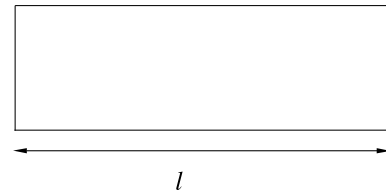
2. à titre indicatif on pourra consulter la feuille de calcul sage :

https://nbviewer.org/url/ats.leboulch.bzh/SageM/Spectre_d_une_corde_de_Melde.ipynb

Application :

Un instrument de musique se modélise par une cavité de longueur ℓ , fermée à une extrémité et ouverte à l'autre. La vitesse du son dans l'air est $c = 340 \text{ m.s}^{-1}$.

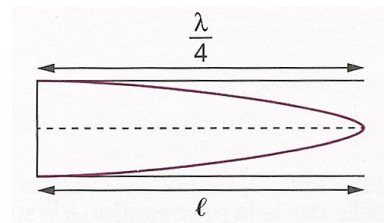
- 1) Quelle doit être la longueur du tuyau pour que la plus faible fréquence d'une onde stationnaire soit $f_1 = 440 \text{ Hz}$ (La4).
- 2) Quelle fréquence f_2 immédiatement supérieure peut exister ?
- 3) Donner l'expression générale de toutes les fréquences possibles des ondes stationnaires pouvant s'établir dans cet instrument.



L'extrémité fermée correspond à un ventre de pression, l'extrémité ouverte à un nœud. On a, pour le mode fondamental :

$$\ell = \frac{\lambda_1}{4} = \frac{c}{4f_1} = 19,3 \text{ cm}$$

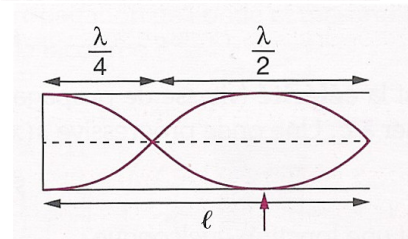
avec $f_1 = \frac{c}{4\ell}$



Pour le deuxième mode : $\ell = \frac{\lambda_2}{4} + \frac{\lambda_2}{2} = \frac{3\lambda_2}{4} = \frac{3c}{4f_2}$

on en déduit $f_2 = \frac{3c}{4\ell} = 3f_1$.

Le deuxième mode correspond à l'harmonique de rang 3.



De manière générale, on écrira pour la fréquence f_n du mode n :

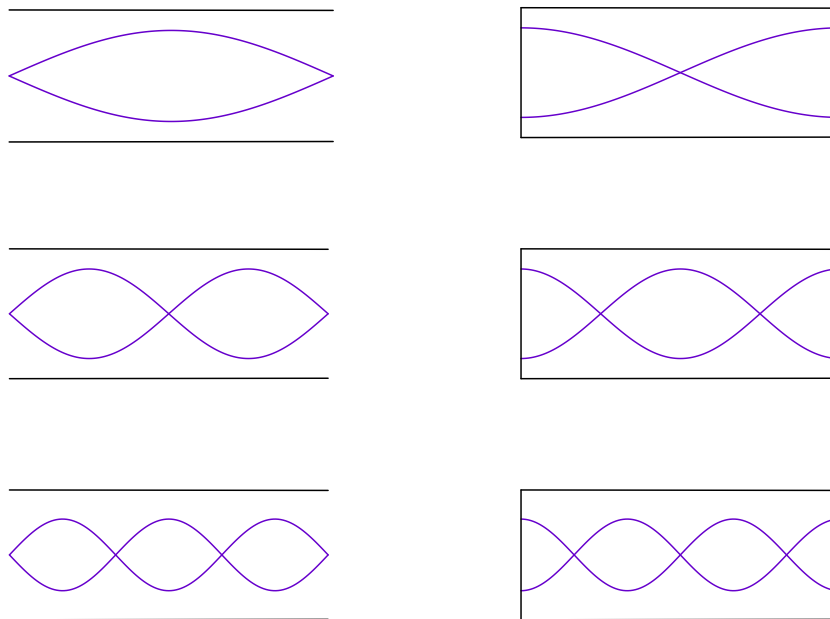
$$\ell = \frac{\lambda_n}{4} + (n-1)\frac{\lambda_n}{2} = (2n-1)\frac{\lambda_n}{4} = (2n-1)\frac{c}{4f_n} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*$$

d'où $f_n = (2n-1)\frac{c}{4\ell} = (2n-1)f_1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

ainsi $f_2 = 3f_1$, $f_3 = 5f_1$ etc...

Les fréquences propres correspondent seulement aux fréquences multiples impaires de la fréquence fondamentale f_1 : le spectre du son produit par ce tuyau ne comportera donc pas d'harmoniques paires.

On peut vérifier facilement qu'un tuyau ouvert à ses deux extrémités est l'équivalent acoustique de la corde de Melde ($L = n\frac{\lambda_n}{2}$) : les fréquences possibles seront donc de la forme $f_n = n\frac{v}{L} = nf_1$.
 Idem pour un tuyau fermé à ses deux extrémités ($L = n\frac{\lambda_n}{2}$).



De manière générale on pourra rechercher l'expression de la surpression $p = P - P_0$ sous la forme

$$p(x, t) = y_0 \sin(kx + \varphi) \cos(\omega t + \psi) \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c}$$

Les conditions aux limites spatiales permettent de retrouver les fréquences propres ainsi que l'expression de ψ .

Propagation unidimensionnelle d'un signal	
Ondes de tension et de courant dans un câble coaxial Équation de d'Alembert unidimensionnelle	Établir les équations de propagation vérifiées par l'intensité du courant et la tension dans un câble coaxial sans pertes modélisé par une inductance linéique et une capacité linéique
Ondes progressives solutions de l'équation de d'Alembert. Retard temporel, célérité. Forme générale des solutions de l'équation de d'Alembert.	Prévoir, dans le cas d'une onde progressive, l'évolution temporelle du signal à position fixée, et son évolution spatiale à un instant donné. Exprimer la célérité en fonction des caractéristiques d'un câble coaxial.
Vibrations transversales d'une corde tendue.	Exprimer la célérité en fonction des paramètres de la corde à partir de l'équation de propagation fournie.
Onde progressive sinusoïdale : phase, double périodicité spatiale et temporelle.	Citer quelques ordres de grandeur de fréquences dans les domaines mécaniques et électromagnétiques et citer des applications associées. Établir la relation entre la fréquence, la longueur d'onde et la célérité.
Ondes stationnaires. Superposition de deux ondes progressives sinusoïdales de même amplitude se propageant dans des sens opposés. Structure de l'onde résultante : nœuds et ventres.	Déterminer les positions des nœuds et des ventres d'une onde stationnaire en fonction de sa longueur d'onde.