

OEM - Propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide
Table des matières

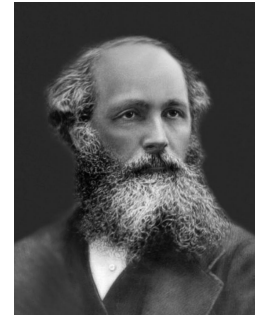
I. Équations de Maxwell	2
I.1. Énoncé	2
I.2. Forme intégrée de l'équation de Maxwell-Faraday	2
I.3. Conservation de la charge	3
I.4. Équations de Maxwell dans le vide	4
II. Ondes électromagnétiques	4
II.1. Définition de l'opérateur laplacien vectoriel	4
II.2. Établissement de l'équation d'onde	5
II.3. Ondes électromagnétiques planes OEMP	7
a) Définition	7
b) Onde plane et équation de propagation	8
II.4. Ondes électromagnétiques planes progressives OEMPP	9
III.OEMPPH Onde ÉlectroMagnétique Plane Progressive Harmonique	9
III.1. Expression générale	10
III.2. Notation complexe	10
III.3. Structure d'une OEMPPH dans le vide	11
a) Retranscription des équations de Maxwell	11
b) Structure transverse	11
c) Couplage entre \vec{E} et \vec{B}	12
d) Généralisation : Relation de structure	13
III.4. Spectre des ondes électromagnétiques	13
IV.OEMPPHPR	14
IV.1. Expression	14
IV.2. Un peu d'entraînement	15
IV.3. Relation de dispersion	16
IV.4. Polarisation d'une onde (pour information)	17
a) Différents états de polarisation	17
b) Aspect expérimental : action d'un polariseur	18
V. Équation locale de conservation de l'énergie : vecteur de Poynting	20
V.1. Bilan énergétique. Vecteur flux d'énergie électromagnétique	20
a) Densité volumique d'énergie électromagnétique	20
b) Vecteur flux d'énergie électromagnétique	20
V.2. Bilan énergétique dans le vide sur un volume macroscopique	20
V.3. Détermination de w_{em} et du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$	22
V.4. Quelques ordres de grandeurs à connaître	23
V.5. Aspect énergétique d'une OEMPPHPR	24
a) Densité volumique d'énergie électromagnétique	25
b) Vecteur de Poynting	25
c) Application	26

VI. Conversion d'énergie électromagnétique en énergie électrique	27
VI.1. Effet photoélectrique et modèle corpusculaire de la lumière	27
VI.2. Cellule photovoltaïque	27
VI.3. Rendement d'un panneau photovoltaïque	29

I. Équations de Maxwell

Les quatre équations de Maxwell constituent le fondement de la théorie électromagnétique. Elles furent publiées en 1864.

En 1885, Hertz fut le premier à produire et à détecter des ondes électromagnétiques, autres que des ondes lumineuses, prédites par la théorie de Maxwell et à mesurer leur vitesse de propagation.



James Clerk Maxwell
1831-1879

I.1. Énoncé

Le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) est défini dans un référentiel \mathcal{R} donné, par la force qui s'exerce sur une particule de charge q mobile à la vitesse \vec{v} par rapport à \mathcal{R} , dite **force de Lorentz** :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Dans un référentiel \mathcal{R} galiléen, le champ électromagnétique vérifie les quatre **équations de Maxwell** :

Maxwell-Gauss $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Maxwell-Faraday $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Maxwell-Flux $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

Maxwell-Ampère $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

On distingue les équations avec sources (Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère), qui contiennent les termes ρ et \vec{j} correspondant aux densités volumiques de charges et de courants sources du champ électromagnétique, des équations sans sources (Maxwell-Flux ou Maxwell-Thomson et Maxwell-Faraday).

En régime stationnaire :

Maxwell-Gauss $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Maxwell-Faraday $\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$

Maxwell-Flux $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

Maxwell-Ampère $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

On retrouve les lois locales de l'électrostatique et de la magnétostatique. On constate alors que les équations en \vec{E} et \vec{B} sont découplées.

I.2. Forme intégrée de l'équation de Maxwell-Faraday

On a déjà vu dans les cours d'électrostatique et de magnétostatique que

- la forme intégrée de l'équation de Maxwell-Gauss donne le théorème de Gauss.
- la forme intégrée de l'équation de Maxwell-Flux indique que \vec{B} est à flux conservatif.
- la forme intégrée de l'équation de Maxwell-Ampère en régime stationnaire donne le théorème d'Ampère.

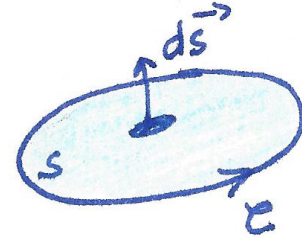
- en régime stationnaire l'équation de Maxwell-Faraday devient $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$. D'après le théorème de Stokes :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

La circulation de \vec{E} sur un circuit fermé est nulle. Le champ électrostatique \vec{E} est dit à circulation conservative et on peut alors poser $\vec{E} = -\text{grad } V$.

- En régime variable, l'équation de Maxwell-Faraday indique que \vec{E} n'est plus à circulation conservative.

Calculons la circulation de \vec{E} sur un contour C fermé, orienté, sur lequel s'appuie une surface S dont l'orientation se déduit de celle de C par la règle de la main droite. C et S sont supposés fixes dans le référentiel d'étude. On a, d'après le théorème de Stokes :



$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

La surface S étant fixe, on peut sortir l'opérateur de dérivation temporelle de l'intégrale :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

On reconnaît la dérivée du flux de \vec{B} à travers le circuit C .

Considérons C un circuit filiforme. On définit e la force électromotrice de ce circuit par

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

On a alors

$$e = - \frac{d\phi}{dt}$$

On retrouve la **loi de Faraday** vue dans le cours sur l'induction électromagnétique.

Remarque : interprétation énergétique de la f.e.m. e

Soit une charge ponctuelle q :

$$qe = \oint_C q\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

qe représente le travail de la force électrique $q\vec{E}$ s'exerçant sur la charge q , et donc l'énergie algébriquement reçue par cette charge lorsqu'elle a parcouru un tour de circuit.

I.3. Conservation de la charge

On a vu que la conservation de la charge était un postulat fondamental de la physique qui s'exprime localement par la relation $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$ (cf EM3). Il n'est pas nécessaire d'ajouter ce postulat aux quatre équations de Maxwell car elles le contiennent déjà.

On donne la relation d'analyse vectorielle toujours vérifiée pour un champ vectoriel \vec{A} :

$$\text{div}(\text{rot } \vec{A}) = 0 \quad (\text{avec la notation nabla } \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0).$$

Utiliser cette relation pour établir l'équation de conservation de la charge à partir des équations

de Maxwell.

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{B}) = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{j} + \varepsilon_0 \operatorname{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

On peut inverser les dérivées temporelles et spatiales (théorème de Schwarz) :

$$\operatorname{div} \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) = 0$$

On retrouve l'équation locale de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Ainsi, il est inutile d'ajouter ce postulat aux équations de Maxwell.

I.4. Équations de Maxwell dans le vide

Dans le vide $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$.

Équations de Maxwell dans le vide

$$\text{Maxwell-Gauss : } \operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad \text{Maxwell-Faraday : } \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{Maxwell-Flux : } \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{Maxwell-Ampère : } \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère font apparaître un couplage entre le champ \vec{E} et le champ \vec{B} .

C'est ce couplage qui permet la propagation d'ondes électromagnétiques.

II. Ondes électromagnétiques

II.1. Définition de l'opérateur laplacien vectoriel

Rappel sur le laplacien scalaire (voir polycopié)

En électrostatique, le champ électrostatique est à circulation conservative et on pose $\vec{E} = -\operatorname{grad} V$.

Dans le vide ($\rho = 0$), $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ entraîne alors $-\operatorname{div}(\operatorname{grad} V) = 0$ soit

$$\Delta V = 0$$

où $\Delta V = \operatorname{div}(\operatorname{grad} V)$ représente le **laplacien scalaire** de V . Il est l'équivalent à trois dimensions de la courbure (liée à la dérivée seconde d'une fonction) à une dimension.

En coordonnées cartésiennes :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Avec la notation nabla (utilisable uniquement en coordonnées cartésiennes) : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z$

$$\Delta V = \nabla^2 V$$

Retenir :

Soit V un champ scalaire. On définit le **laplacien scalaire** ΔV par

$$\Delta V = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} V)$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Définition du laplacien vectoriel

Soit \vec{A} un champ vectoriel, on définit l'opérateur **laplacien vectoriel** $\vec{\Delta} \vec{A}$ par la relation

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{A}) - \vec{\Delta} \vec{A}$$

Il a pour expression en **coordonnées cartésiennes** :

$$\vec{\Delta} \vec{A} = \Delta A_x \vec{u}_x + \Delta A_y \vec{u}_y + \Delta A_z \vec{u}_z$$

ce qui correspond à :

$$\vec{\Delta} \vec{A} = \begin{cases} \Delta A_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \Delta A_y = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \Delta A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{cases} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{A}$$

II.2. Établissement de l'équation d'onde

Dans le vide $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$, les équations de Maxwell deviennent :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 & \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

• Équation vérifiée par \vec{E}

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\underbrace{\text{div} \vec{E}}_{=0}) - \Delta \vec{E}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\Delta \vec{E}$$

On peut inverser les dérivées spatiales et temporelles (théorème de Schwarz)

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = -\Delta \vec{E}$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \Delta \vec{E}$$

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

On trouve une équation de propagation de la forme :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

• **Équation vérifiée par \vec{B}**

On peut procéder de même avec le champ magnétique :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\underbrace{\text{div} \vec{B}}_{=0}) - \Delta \vec{B}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\Delta \vec{B}$$

D'où, en inversant les dérivées spatiales et temporelles (théorème de Cauchy-Schwarz)

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\Delta \vec{B}$$

$$-\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\Delta \vec{B}$$

$$\Delta \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

On retrouve une équation de propagation de la forme :

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

On obtient pour \vec{E} et \vec{B} une généralisation à trois dimensions de l'équation de D'Alembert.

En coordonnées cartésiennes, chaque composante du champ électrique et du champ magnétique vérifie l'équation de propagation :

$$\Delta E_i - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = 0$$

avec c vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

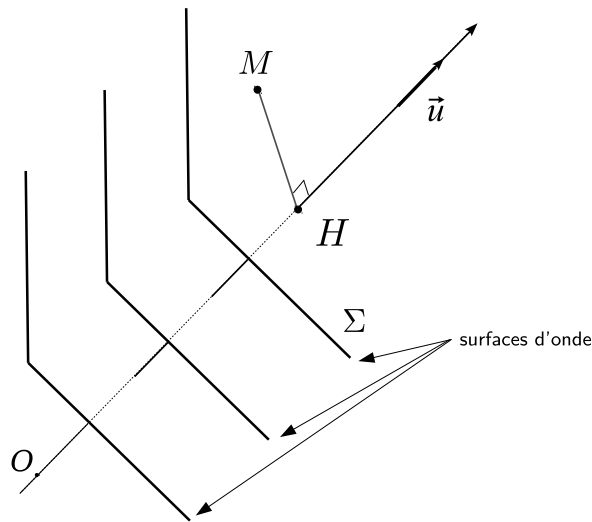
Remarque : On peut vérifier qu'avec $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ on trouve $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ en accord avec la valeur de la constante fixée par le BIPM : $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

II.3. Ondes électromagnétiques planes OEMP

a) Définition

On considère une onde électromagnétique caractérisée par les champs $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$. On nomme **surface d'onde** Σ le lieu des points M où, à $t = t_0$ fixé, le signal $\vec{E}(M, t_0)$ (ou $\vec{B}(M, t_0)$) a la même valeur.

Pour une **onde plane**, les surfaces Σ sont des plans, perpendiculaires à une même direction (voir schéma ci-dessous). On note \vec{u} le vecteur unitaire associé cette direction.



On en déduit l'expression générale de \vec{E} :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}(\overline{OH}, t) = \vec{E}(\overline{OM} \cdot \vec{u}, t)$$

Le champ électrique associé à une **onde plane**, pour laquelle les surfaces d'onde sont des plans perpendiculaires à la direction d'un vecteur unitaire \vec{u} aura pour expression générale :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}(\overline{OM} \cdot \vec{u}, t)$$

Si on choisit la direction \vec{u}_x telle que $\vec{u} = \vec{u}_x$, on aura

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}(x, t)$$

de même

$$- \text{ si } \vec{u} = \vec{u}_y : \vec{E}(M, t) = \vec{E}(y, t)$$

$$- \text{ si } \vec{u} = \vec{u}_z : \vec{E}(M, t) = \vec{E}(z, t)$$

Le champ associé à une onde plane ne dépend donc que d'un seul paramètre d'espace axial et du temps.

b) Onde plane et équation de propagation

On considère une onde plane dépendant de la variable d'espace x pour laquelle :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}(x, t) \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) = \vec{B}(x, t)$$

Simplifier les équations d'onde vérifiées par les champs \vec{E} et \vec{B} , dans le cas d'onde plane.

Le champ \vec{E} vérifie

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

On a $\vec{E}(M) = E_x(x, t)\vec{u}_x + E_y(x, t)\vec{u}_y + E_z(x, t)\vec{u}_z$.

• Calcul de $\Delta \vec{E}$:

$$\Delta \vec{E} = \Delta E_x(x, t)\vec{u}_x + \Delta E_y(x, t)\vec{u}_y + \Delta E_z(x, t)\vec{u}_z$$

avec $\Delta E_x = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_x(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_x(x, t)$ car E_x ne dépend pas de y , ni de z .

De même $\Delta E_y(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y(x, t)$ et $\Delta E_z(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_z(x, t)$.

Ainsi :

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (E_x(x, t)\vec{u}_x + E_y(x, t)\vec{u}_y + E_z(x, t)\vec{u}_z) = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}$$

L'équation d'onde devient

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

On retrouve l'équation de d'Alembert unidimensionnelle.

On trouverait le même résultat pour l'équation vérifiée par \vec{B} .

Le champ électrique associé à une **onde plane** d'expression $\vec{E}(M, t) = \vec{E}(x_i, t)$ vérifie l'équation de d'Alembert unidimensionnelle :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

avec $x_i = x$, $x_i = y$, $x_i = z$ ou $x_i = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}$.

II.4. Ondes électromagnétiques planes progressives OEMPP

L'équation de d'Alembert unidimensionnelle admet comme solutions des superpositions d'ondes planes progressives se propageant dans deux sens opposés.

De manière générale, une onde électromagnétique plane progressive se propageant dans la direction et dans le même sens que le vecteur unitaire \vec{u} aura pour expression :

$$\vec{E}\left(t - \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}}{c}\right) \quad \text{ou} \quad \vec{E}(\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u} - ct)$$

Si on choisit la direction \vec{u}_x telle que $\vec{u} = \vec{u}_x$, on aura

$$\vec{E}\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad \text{ou} \quad \vec{E}(M, t) = \vec{E}(x - ct)$$

Exemples : préciser la direction et le sens de propagation des signaux suivants :

▷ $\vec{E}(x - ct)$

onde plane progressive se propageant dans le sens des x croissants à la vitesse c .

▷ $\vec{E}\left(t - \frac{x}{c}\right)$

onde plane progressive se propageant dans le sens des x croissants à la vitesse c .

▷ $\vec{E}(z + ct)$

onde plane progressive se propageant dans le sens des z décroissants à la vitesse c .

▷ $\vec{E}\left(t + \frac{y}{c}\right)$

onde plane progressive se propageant progressive dans le sens des y décroissants à la vitesse c .

▷ $\vec{E}\left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - ct\right)$

onde plane progressive progressive se déplaçant à la vitesse c dans la direction et le même sens que le vecteur unitaire $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{u}_x + \frac{4}{5}\vec{u}_y$

III. OEMPPH Onde ÉlectroMagnétique Plane Progressive Harmonique

Grâce à l'analyse de Fourier, toute onde plane peut s'exprimer comme la superposition d'ondes planes progressives harmoniques.

Dans le domaine optique, chaque fréquence étant associée à une couleur on parle également d'OEMPPM pour Onde ÉlectroMagnétique Plane Progressive **Monochromatique**.

III.1. Expression générale

On note $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ le vecteur position du point M . Soit E_i une composante quelconque du champ électrique sur la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. On a, pour une OEMPPH :

$$E_i = E_{0i} \cos \left(\omega \left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}}{c} \right) + \varphi_i \right)$$

$$E_i = E_{0i} \cos \left(\omega t - \frac{\omega}{c} \vec{u} \cdot \vec{r} + \varphi_i \right)$$

On pose $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u} = k \vec{u}$ avec $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi}{\lambda}$, appelé **vecteur d'onde**.

$$E_i = E_{0i} \cos \left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_i \right)$$

Le champ électrique associé à une OEMPPH se propageant dans la direction du vecteur unitaire \vec{u} a pour expression générale :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \begin{cases} E_{0x} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_x) \\ E_{0y} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_y) \\ E_{0z} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_z) \end{cases}$$

avec $\vec{k} = k \vec{u} = \frac{\omega}{c} \vec{u} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}$ le **vecteur d'onde** associé à cette onde.

On pourrait écrire une expression équivalente pour $\vec{B}(\vec{r}, t)$.

Rappels des formules à connaître :

- ω est appelée la **pulsation** de l'onde

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \text{ avec } T \text{ la } \mathbf{période} \text{ de l'onde et } f = \frac{1}{T} \text{ sa } \mathbf{fréquence}.$$

- $\lambda = cT = \frac{c}{f}$ est la **longueur d'onde** : c'est la période spatiale de l'onde. Elle correspond à la distance parcourue par l'onde en une période T . On a la relation :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

III.2. Notation complexe

On peut rendre la notation du champ électrique \vec{E} beaucoup plus compacte à l'aide de la notation complexe.

On pose

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad \text{avec} \quad \underline{\vec{E}}_0 \begin{cases} E_{0x} e^{j\varphi_x} \\ E_{0y} e^{j\varphi_y} \\ E_{0z} e^{j\varphi_z} \end{cases}$$

avec $\vec{E} = \text{Re}(\underline{\vec{E}})$.

Cette notation permet de simplifier les calculs.

En coordonnées cartésiennes : $\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$.

$$\vec{k} \begin{vmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{vmatrix} \quad \vec{r} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \quad \vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z \quad \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$$

$$\vec{\nabla} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} = -jk_x \\ \frac{\partial}{\partial y} = -jk_y \\ \frac{\partial}{\partial z} = -jk_z \end{vmatrix} = -j\vec{k}$$

De même, $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$.

Retenir :

Si on pose $\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ alors $\vec{\nabla} = -j\vec{k}$ et $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$

Remarque : on pourrait également poser

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

dans ce cas $\vec{\nabla} = j\vec{k}$ et $\frac{\partial}{\partial t} = -j\omega$

Il faut donc s'adapter à la convention de signe choisie par l'énoncé.

III.3. Structure d'une OEMPPH dans le vide

a) Retranscription des équations de Maxwell

Équations de Maxwell dans le vide :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= 0 & \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{B} &= 0 & \text{rot } \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

retranscrites à l'aide du vecteur nabla :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

on obtient en notation complexe :

$$\begin{aligned} -j\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} &= 0 & -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} &= -j\omega \underline{\vec{B}} \\ -j\vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} &= 0 & -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} &= \mu_0 \epsilon_0 j\omega \underline{\vec{E}} \end{aligned}$$

b) Structure transverse

D'après l'équation de Maxwell-Gauss

$$\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0$$

D'où, avec $\vec{k} = k\vec{u}$

$$\vec{u} \cdot \underline{\vec{E}} = 0$$

En prenant la partie réelle

$$\operatorname{Re}(\vec{u} \cdot \vec{E}) = \vec{u} \cdot \operatorname{Re}(\vec{E}) = \vec{u} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{E} = 0}$$

Le champ électrique \vec{E} est donc à tout instant perpendiculaire à la direction de propagation \vec{u} .
On démontre de même, à partir de l'équation de Maxwell-flux, $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ que

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{B} = 0}$$

Le champ électrique \vec{B} est donc à tout instant perpendiculaire à la direction de propagation \vec{u} .

c) Couplage entre \vec{E} et \vec{B}

D'après l'équation de Maxwell-Faraday, en simplifiant par $-j$:

$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

En prenant les parties réelles :

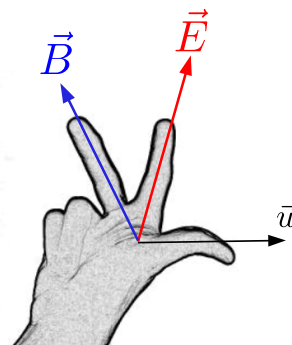
$$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}}$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$\vec{B} = \frac{c}{\omega} \vec{u} \wedge \vec{E}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}}$$

Le trièdre $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$ est un trièdre direct.



On calcule la norme de \vec{B} , en tenant compte du fait que $\vec{u} \perp \vec{E}$:

$$\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{u}\| \|\vec{E}\|}{c} = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$$

d) **Généralisation : Relation de structure**

D'après l'analyse de Fourier, toute OEMPP se propageant dans la direction \vec{u} peut s'écrire comme une superposition d'OEMPPH se propageant suivant la même direction \vec{u} avec des pulsations différentes. Or la structure d'une OEMPPH est indépendante de ω . On peut donc étendre les propriétés établies pour les OEMPPH aux OEMPP.

Relation de structure

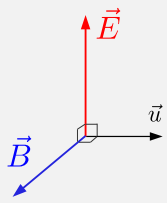
Une OEMPP dans le vide se propageant dans la direction \vec{u} a une structure transverse

$$\vec{u} \cdot \vec{E} = 0$$

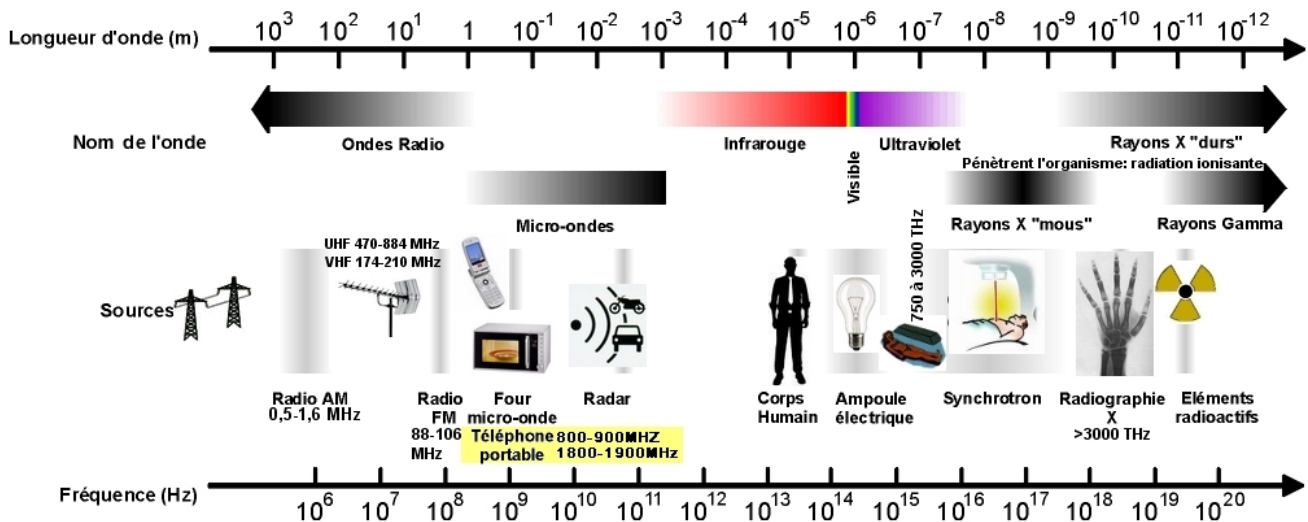
$$\vec{u} \cdot \vec{B} = 0$$

et $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$ forme un trièdre direct avec :
$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$$

qui peut également s'écrire pour une OEMPP harmonique :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$


III.4. Spectre des ondes électromagnétiques



Spectre des ondes électromagnétiques

Les ondes électromagnétiques sont produites par des oscillations de charges électriques dans des dispositifs très divers.

Les ondes électromagnétiques couvrent un très large spectre de fréquence. On distingue trois domaines principaux, le domaine des ondes radios (voir tableau ci-dessous), le domaine optique, allant de l'infrarouge à l'UV, le domaine visible en constituant une sous partie pour des longueurs d'onde allant de 400 nm à 800 nm (et des fréquences de l'ordre de 10^{14} Hz).

Pour des fréquences encore plus élevées on parle de rayonnements ionisants (X et γ).

IV. OEMPPHPR

On a montré que l'onde électromagnétique plane progressive dans le vide possédait une structure transverse. Lorsque le champ électrique vibre suivant une direction fixe \vec{u}_p , appelée direction de polarisation, alors l'onde est polarisée rectilignement.

IV.1. Expression

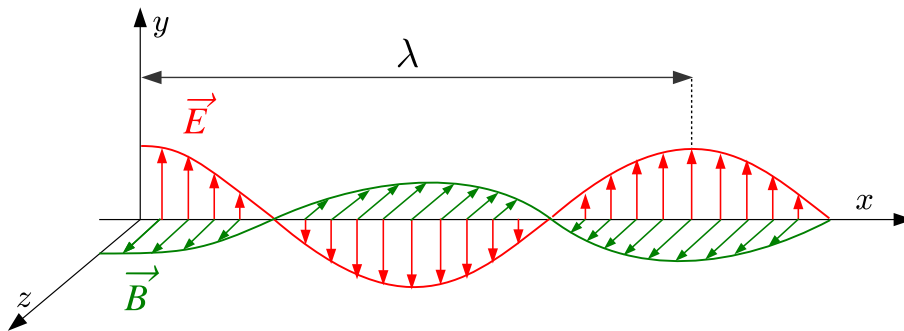
Une OEMPPHPR polarisée rectilignement suivant la direction \vec{u}_p , se propageant dans la direction \vec{u} a pour expression

$$\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)} \vec{u}_p = \underline{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \vec{u}_p$$

avec $\vec{k} = k\vec{u}$ le vecteur d'onde et $\underline{E}_0 = E_0 e^{j\varphi}$ l'amplitude complexe du champ électrique.

Remarque : on peut toujours choisir une origine des temps telle que $\varphi = 0$. Dans ce cas l'amplitude complexe $\underline{E}_0 = E_0$ est réelle.

Exemple : onde polarisée rectilignement suivant la direction \vec{u}_y se propageant dans la direction des x croissants.



Exprimer le champ électromagnétique :

En notation complexe : $\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_y$ en choisissant une origine des temps telle que $\varphi = 0$.

En notation réelle : $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$,

avec $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$,

On en déduit :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z.$$

IV.2. Un peu d'entraînement

• Donner l'expression du champ électrique associé aux ondes électromagnétiques planes progressives harmoniques, d'amplitude E_0 et de pulsation ω , décrites ci-dessous :

- Onde se propageant dans le sens des x croissants, polarisée rectilignement dans une direction faisant un angle de 60° avec la direction de \vec{u}_y .
- Onde polarisée rectilignement suivant la direction \vec{u}_y et se propageant dans une direction faisant, dans le plan xOz un angle de 30° avec \vec{u}_x .

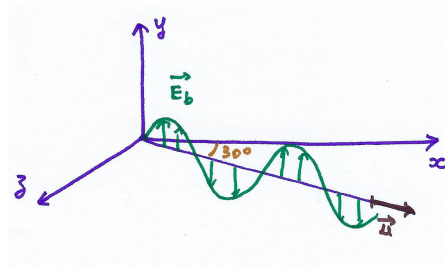
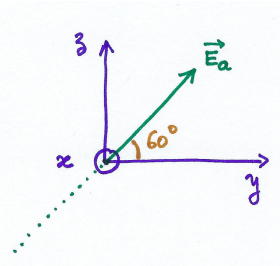
$$\triangleright \vec{E}_a = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_0 \cos(60^\circ) \cos(\omega t - kx) \\ E_z = E_0 \sin(60^\circ) \cos(\omega t - kx) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = \frac{E_0}{2} \cos(\omega t - kx) \\ E_z = \frac{E_0\sqrt{3}}{2} \cos(\omega t - kx) \end{pmatrix}$$

\triangleright La direction de propagation est $\vec{u} = \cos(30^\circ)\vec{u}_x + \sin(30^\circ)\vec{u}_z = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_x + \frac{1}{2}\vec{u}_z$.

$$\text{On a } \vec{k} \cdot \vec{r} = k\vec{u} \cdot \vec{r} = k\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_x + \frac{1}{2}\vec{u}_z\right) \cdot (x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z) = k\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z\right).$$

On peut alors exprimer \vec{E}_b :

$$\vec{E}_b = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \\ E_z = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{k}{2}(\sqrt{3}x + z)\right) \\ E_z = 0 \end{pmatrix}$$



- Donner la direction de propagation ainsi que la direction de polarisation des ondes associées aux champs électriques suivants :

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} E_x = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - ky) \\ E_y = 0 \\ E_z = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - ky) \end{pmatrix} \quad \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = 0 \\ E_z = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{k}{\sqrt{2}}(x + y)\right) \end{pmatrix}$$

- ▷ \vec{E}_1 : OEMPPHPR se propageant dans le sens des y croissants, et dont la direction de polarisation \vec{u}_p a pour expression :

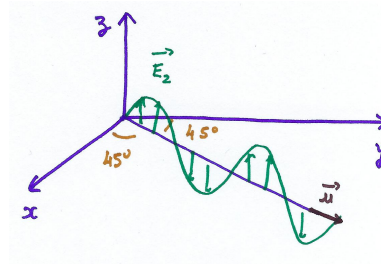
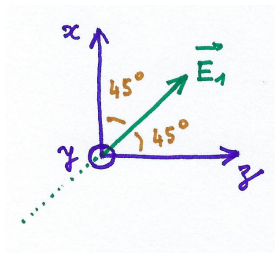
$$\vec{u}_p = \cos(45^\circ)\vec{u}_x + \sin(45^\circ)\vec{u}_z = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{u}_x + \vec{u}_z) = \frac{(\vec{u}_x + \vec{u}_z)}{\sqrt{2}}$$

- ▷ \vec{E}_2 : OEMPPHPR polarisée suivant la direction \vec{u}_z et se propageant dans la direction \vec{u} telle que

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k\vec{u} \cdot \vec{r} = \frac{k}{\sqrt{2}}(x + y)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y$$

d'où $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{u}_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{u}_y$. On en déduit l'angle de 45° que fait \vec{u} avec \vec{u}_x et \vec{u}_y .



IV.3. Relation de dispersion

On considère une OEMPPHPR se propageant dans la direction des x croissants et polarisée suivant la direction \vec{u}_y .

On a établi l'équation de propagation du champ électrique :

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

1. Donner l'expression du champ électrique \vec{E} de l'onde.
2. Dédire de l'équation d'onde, une relation entre k , ω et les constantes utiles. Cette relation est appelée relation de dispersion.

1. $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{u}_y$.

2. $\vec{\Delta} \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -k^2 \vec{E}$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$$

On reporte dans l'équation d'onde

$$-k^2 \vec{E} + \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \vec{E} = \vec{0}$$

$$(-k^2 + \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2) \vec{E} = \vec{0}$$

$$-k^2 + \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 = 0$$

$$k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$$

$$k = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \omega$$

Comme $\omega = ck$ on retrouve $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$. Cette vitesse est indépendante de ω : toutes les fréquences se propagent dans le vide à la même vitesse.

Ce n'est plus le cas lorsque les ondes électromagnétiques traversent certains milieux. Les différentes fréquences se propagent à des vitesses différentes : le milieu est dit "dispersif". Connaissez vous un exemple qui permette d'illustrer ce phénomène ?

IV.4. Polarisation d'une onde (pour information)

a) Différents états de polarisation

On s'est intéressé uniquement aux OEMPPH polarisées rectilignement. Que se passe-t-il si on superpose deux ondes polarisées rectilignement dans deux directions perpendiculaires se propageant dans la même direction \vec{u}_z ?

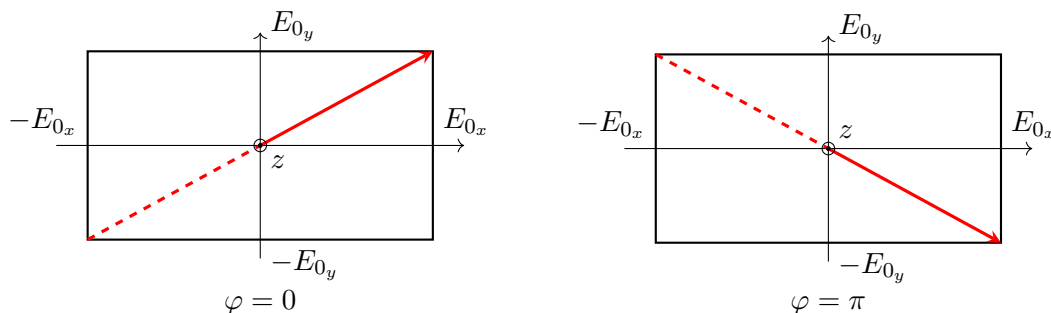
L'équation d'onde étant linéaire la superposition de deux OEMPPH est aussi solution de l'équation d'onde. On considère que la direction de propagation est \vec{u}_z et que les deux directions de polarisation perpendiculaires sont \vec{u}_x et \vec{u}_y . On a $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ et on peut toujours choisir une origine des temps telle que :

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E_y = 0 \\ E_z = 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi) \\ E_z = 0 \end{pmatrix}$$

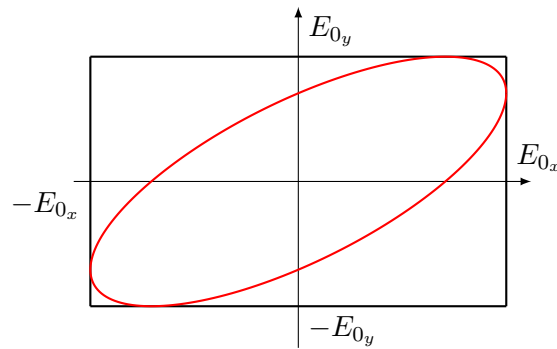
d'où

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi) \\ E_z = 0 \end{pmatrix}$$

Si $\varphi = 0$ ou π alors on conserve une polarisation rectiligne : en un point donné, le champ \vec{E} oscille suivant l'une ou l'autre des diagonales d'un rectangle de côtés compris sur x , entre $-E_{0x}$ et E_{0x} et sur y entre $-E_{0y}$ et E_{0y} .



Si $\varphi \neq 0$ et $\varphi \neq \pi$ l'extrémité du vecteur champ magnétique décrit une ellipse, voire un cercle lorsque $E_{0x} = E_{0y}$ et $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$.



La lumière naturelle n'est en général pas polarisée : elle peut être vue comme une succession d'ondes polarisées rectilignement dans des directions aléatoires. La lumière qui nous environne peut être partiellement polarisée lors d'une réflexion sur une surface, ou par la diffusion atmosphérique (voir le lien dans la partie b "Diverses observations de lumières polarisées").

Pour visualiser les diverses polarisations :

Regarder du début jusqu'à 1 min 45 s environ :

<https://www.youtube.com/watch?v=BycPkRIutqg>

À voir également

https://emanim.szialab.org/index_fr.html

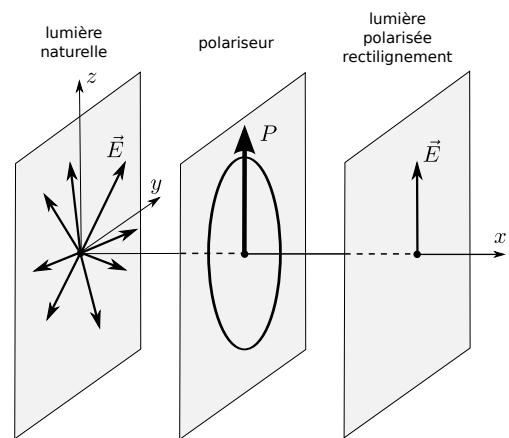
ainsi que ce lien (un peu long, mais les différentes polarisations sont construites par addition de deux ondes polarisées rectilignement et ça peut même vous bercer le soir avant de vous endormir...).

<https://www.youtube.com/watch?v=8YkfEft4p-w>

b) Aspect expérimental : action d'un polariseur

La lumière naturelle (produite par le Soleil, les lampes qui nous entourent) n'est pas polarisée : le champ \vec{E} vibre aléatoirement dans toutes les directions perpendiculaires à la direction de propagation.

Un dispositif appelé polariseur permet de sélectionner une direction particulière de vibration (correspondant à la direction du polariseur). On obtient alors une onde polarisée rectilignement.

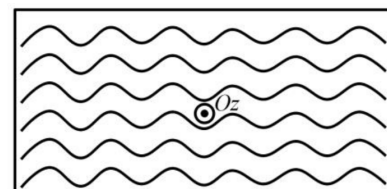


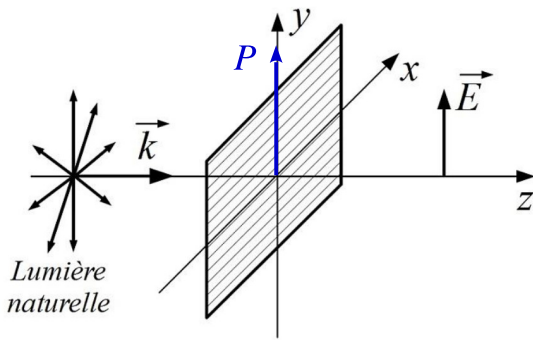
Principe du polariseur

Il s'agit d'une lame fine, composée de macromolécules toutes étirées dans le même sens.

Lorsque la lumière naturelle arrive sur le polariseur :

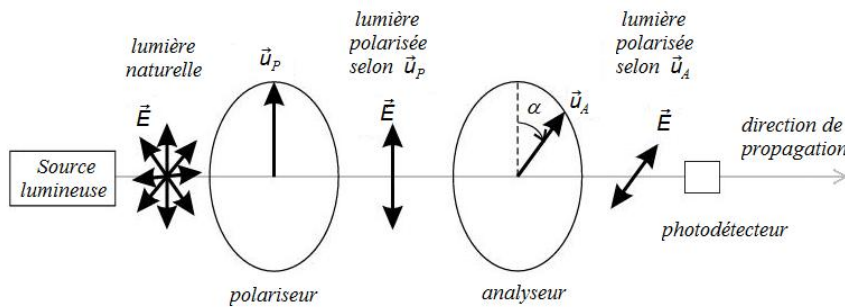
- la composante de \vec{E} parallèle aux macromolécules est (presque) totalement absorbée ;
- la composante de \vec{E} orthogonale aux macromolécules est (presque) entièrement transmise.





Il en résulte une onde polarisée rectilignement (orthogonalement aux macromolécules). Cette direction privilégiée de \vec{E} correspond à la direction de polarisation P du polariseur.

Expérience

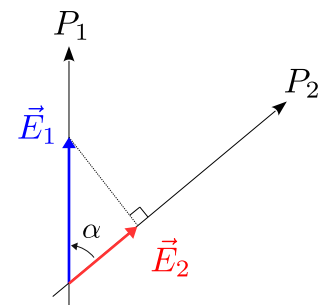


On place dans un faisceau lumineux un premier polariseur ($P_1 = P$) de direction verticale puis un second polariseur ($P_2 = A$) appelé analyseur dont la direction fait un angle α avec la direction du premier polariseur.

Soit \vec{E}_1 le champ électrique transmis par le premier polariseur. Soit \vec{E}_2 le champ électrique transmis par le second polariseur. Il correspond à la projection orthogonale de \vec{E}_1 sur la direction de P_2 . On a ainsi

$$\|\vec{E}_2\| = \|\vec{E}_1\| \cos \alpha$$

On constate que, lorsque (P_1) et (P_2) sont croisés perpendiculairement ($\alpha = \frac{\pi}{2}$), alors $\|\vec{E}_2\| = 0$: plus aucune lumière n'est transmise.



Petite expérience à faire chez vous (surtout si vous êtes devant votre ordinateur). Si vous possédez des lunettes solaires polarisées (elles se comportent comme un polariseur), approchez les de l'écran de votre ordinateur et tournez les... Conclure quant à la nature de la lumière émise par votre écran¹.

Animation :

<http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/optiondu/ondepola3D.html>

Diverses observations de lumière polarisée : <https://www.youtube.com/watch?v=5L1mFYTntGk>

1. Voir article Idées de Physique du magazine Pour la Science Mars 2016 "Des valves à lumière dans les écrans"

V. Équation locale de conservation de l'énergie : vecteur de Poynting

V.1. Bilan énergétique. Vecteur flux d'énergie électromagnétique

a) Densité volumique d'énergie électromagnétique

On a montré dans les chapitres précédents que l'on pouvait associer à un champ électrique \vec{E} une densité volumique d'énergie $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ et à un champ magnétique \vec{B} une densité volumique d'énergie $\frac{1}{2\mu_0} B^2$.

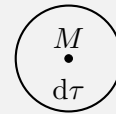
De manière générale, on peut définir la **densité volumique d'énergie électromagnétique** w_{em} .

On note w_{em} la **densité volumique d'énergie électromagnétique**.

Un volume élémentaire $d\tau$ entourant un point M donné contient une énergie électromagnétique :

$$w_{em}(M, t)d\tau$$

$$[w_{em}] = \text{J.m}^{-3}$$



b) Vecteur flux d'énergie électromagnétique

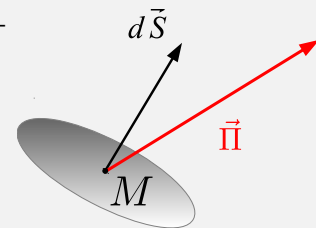
On définit $\vec{\Pi}$ le vecteur flux d'énergie électromagnétique, appelé **vecteur de Poynting**.

$\vec{\Pi} \cdot d\vec{S} dt$ représente l'énergie électromagnétique ayant traversé la surface orientée élémentaire $d\vec{S}$ pendant le temps dt .

▷ $\vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$ est donc homogène à une puissance (en watt).

▷ $\|\vec{\Pi}\|$ est homogène à une puissance par unité de surface.

$$[\|\vec{\Pi}\|] = \text{W.m}^{-2}.$$



V.2. Bilan énergétique dans le vide sur un volume macroscopique

La force de Lorentz peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

La force magnétique $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ a une puissance nulle car $q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$. Seule la force électrique $q\vec{E}$ peut transférer de l'énergie à une charge.

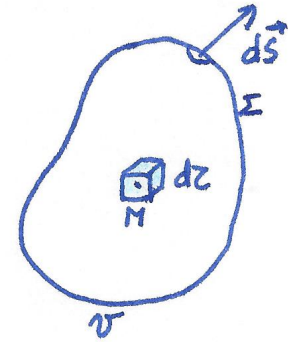
On a vu (voir chapitre EM3) que la puissance volumique *cédée* par le champ électrique à un conducteur avait pour expression $\mathcal{P}_v = \vec{j} \cdot \vec{E}$.

Dans le vide, $\vec{j} = \vec{0}$, l'énergie électromagnétique ne peut pas être convertie en une autre forme d'énergie. Elle est donc conservée.

On souhaite exprimer localement la conservation de l'énergie électromagnétique **dans le vide** à partir d'un bilan macroscopique sur un volume \mathcal{V} donné.

On note $\mathcal{E}_{\text{em}}(t)$ l'énergie électromagnétique contenue dans ce volume \mathcal{V} à l'instant t . La variation d'énergie électromagnétique contenue dans le volume \mathcal{V} entre l'instant t et l'instant $t + dt$ est égale l'énergie algébriquement **reçue** pendant dt . On calcule donc le flux **entrant** de $\vec{\Pi}$ (d'où l'orientation $-\vec{dS}$ du vecteur surface).

$$\mathcal{E}_{\text{em}}(t + dt) - \mathcal{E}_{\text{em}}(t) = \oiint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot (-\vec{dS}) dt$$



avec

$$\mathcal{E}_{\text{em}}(t + dt) - \mathcal{E}_{\text{em}}(t) = \iiint_{\mathcal{V}} w_{\text{em}}(M, t + dt) d\tau - \iiint_{\mathcal{V}} w_{\text{em}}(M, t) d\tau$$

$$\mathcal{E}_{\text{em}}(t + dt) - \mathcal{E}_{\text{em}}(t) = \iiint_{\mathcal{V}} [w_{\text{em}}(M, t + dt) - w_{\text{em}}(M, t)] d\tau$$

$$\mathcal{E}_{\text{em}}(t + dt) - \mathcal{E}_{\text{em}}(t) = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial w_{\text{em}}}{\partial t}(M, t) dt d\tau$$

d'où

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial w_{\text{em}}}{\partial t}(M, t) d\tau dt = \oiint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot (-\vec{dS}) dt$$

En utilisant de théorème d'Ostrogradski

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial w_{\text{em}}}{\partial t}(M, t) d\tau = - \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{\Pi} d\tau$$

La relation devant être vérifiée quel que soit \mathcal{V}

$$\frac{\partial w_{\text{em}}}{\partial t} = - \text{div } \vec{\Pi}$$

Équation locale de Poynting dans le vide

Dans le vide, la densité volumique d'énergie w_{em} et le vecteur flux d'énergie $\vec{\Pi}$, appelé vecteur de Poynting, vérifient la relation :

$$\frac{\partial w_{\text{em}}}{\partial t} + \text{div } \vec{\Pi} = 0$$

V.3. Détermination de w_{em} et du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$

On donne la formule d'analyse vectorielle² :

$$\operatorname{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}$$

On part des équations de Maxwell dans le vide pour essayer de "fabriquer" l'équation locale de Poynting.

$$\frac{\partial ?}{\partial t} + \operatorname{div} ? = 0$$

sachant que $w_{em} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 + \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ est une possibilité à envisager...

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (M.F.)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (M.A.)$$

En multipliant scalairement l'équation de Maxwell-Faraday (M.F.) par \vec{B} et l'équation de Maxwell-Ampère (M.A.) par \vec{E} , on fait apparaître, à un facteur multiplicatif près, les dérivées temporelles des densités volumiques d'énergie électrique et magnétique.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1) \\ \vec{E} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2) \end{array} \right.$$

Pour utiliser la formule d'analyse vectorielle fournie on calcule (1) - (2) :

$$\vec{B} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} - \vec{E} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \epsilon_0 E^2 \right)$$

$$\vec{B} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} - \vec{E} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \operatorname{div}(\vec{E} \wedge \vec{B})$$

d'où

$$\operatorname{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \epsilon_0 E^2 \right) = 0$$

On divise par μ_0 pour obtenir des termes homogènes à une densité volumique d'énergie :

$$\operatorname{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\mu_0} B^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right) = 0$$

En posant $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ et $w_{em} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ on obtient

$$\frac{\partial w_{em}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\Pi} = 0$$

2. cette formule n'est pas à connaître par cœur

Retenir :

Expressions du vecteur de Poynting et de la densité volumique d'énergie électromagnétique

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad w_{\text{em}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

V.4. Quelques ordres de grandeurs à connaître**Flux solaire terrestre :**

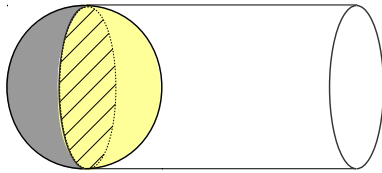
L'énergie traversant, pendant une seconde, une surface de 1 m^2 placée perpendiculairement au rayonnement solaire et en dehors de l'atmosphère terrestre vaut : 1360 J .

On en déduit la puissance par unité de surface (et donc la norme du vecteur de Poynting) : $\mathcal{P}_s = 1360 \text{ W.m}^{-2}$.

En déduire la puissance moyenne reçue par unité de surface terrestre, située hors atmosphère.

Pendant une durée $\Delta t = 1$ jour la Terre reçoit une énergie

$$\mathcal{E} = \mathcal{P}_s \pi R_T^2 \Delta t$$



avec R_T le rayon de la Terre.

La surface totale de la Terre vaut $4\pi R_T^2$. On en déduit la puissance moyenne par unité de surface de la Terre :

$$\langle \mathcal{P}_s \rangle = \frac{1}{\Delta t} \frac{\mathcal{P}_s \pi R_T^2 \Delta t}{4\pi R_T^2} = \frac{\mathcal{P}_s}{4} = 340 \text{ W.m}^{-2}$$

C'est cette valeur que l'on utilise lorsqu'on établit le bilan radiatif de la Terre.

Remarque : avant d'arriver au sol, le rayonnement solaire est en partie absorbé par l'atmosphère. Cette absorption dépend de l'épaisseur de l'atmosphère traversée et de la pureté du ciel (présence d'humidité, de poussières ...). L'épaisseur de l'atmosphère traversée dépend de l'inclinaison des rayons solaires. Lorsque le soleil est au zénith on peut, par beau temps récupérer environ 800 W.m^{-2} .

Les photographies ci-dessous ont été prises dans une station service près de Lyon. Le dispositif utilise l'énergie solaire pour chauffer l'eau de la station. Un panneau explique l'avantage d'utiliser la forme sphérique pour récupérer l'énergie solaire.



Faisceau laser :

On considère un faisceau laser de diamètre $d = 1,0 \text{ mm}$ et de puissance $\mathcal{P} = 1,0 \text{ mW}$. Calculer la norme du vecteur de Poynting.

$$\|\vec{\Pi}\| = \frac{\mathcal{P}}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \times 10^{-3}}{\pi 1,0 \cdot 10^{-6}} = \frac{4 \cdot 10^3}{\pi} = 1,3 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

V.5. Aspect énergétique d'une OEMPPHPR

La densité volumique d'énergie et le vecteur de Poynting font apparaître des produits : on doit donc, pour les évaluer, revenir à la notation réelle. En effet, la partie réelle d'un produit n'est en général pas égal au produit des parties réelles.

On considère une OEMPPH polarisée rectilignement suivant \vec{u}_y se propageant dans le sens des x croissants

On peut choisir un repère et une origine des temps tels que \vec{E} s'exprime sous la forme :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

En déduire l'expression de \vec{B} :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z$$

a) **Densité volumique d'énergie électromagnétique**

$$w_{em} = w_{el} + w_{mag} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

avec w_{el} densité volumique d'énergie électrique et w_{mag} densité volumique d'énergie magnétique.

$$w_{el} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

$$w_{mag} = \frac{1}{2\mu_0} \frac{E_0^2}{c^2} \cos^2(\omega t - kx) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \quad \text{car } c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}, \text{ d'où } \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0}.$$

ainsi :

$$w_{el} = w_{mag} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

On dit qu'il y a **équipartition** de l'énergie électromagnétique entre les formes magnétique et électrique.

$$w_{em} = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

En valeur moyenne

$$\langle w_{em} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 \times \frac{1}{2}$$

$$\langle w_{em} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2$$

b) **Vecteur de Poynting**

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

$$\vec{\Pi} = \frac{E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y \wedge \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx) \vec{u}_x$$

En valeur moyenne :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle \vec{u}_x = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x$$

que l'on peut également exprimer sous la forme :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2\mu_0 \varepsilon_0 c} \vec{u}_x = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 c^2}{2c} \vec{u}_x = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} c \vec{u}_x = \langle w_{em} \rangle c \vec{u}_x$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x = \langle w_{em} \rangle c \vec{u}_x$$

Le vecteur de Poynting d'une OEMPPHPR a la même direction et le même sens que celui de la propagation de l'onde

Remarque : une OEMPPH seule n'existe pas physiquement, car elle correspondrait à une énergie infinie sa densité volumique d'énergie étant constante dans tout l'espace et sur une durée infinie. C'est un modèle qui n'est valable que localement dans le temps et l'espace. De plus toute onde électromagnétique réelle peut s'écrire comme une superposition d'OEMPPH .

c) Application

On considère un faisceau laser He-Ne, de longueur d'onde $\lambda = 632,8 \text{ nm}$, de section $S = 1,0 \text{ mm}^2$ et de puissance $\mathcal{P} = 1,0 \text{ mW}$.

On modélise ce faisceau par une OEMPPHPR. Déterminer l'amplitude E_0 du champ électrique. Rappel : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.

Calculons tout d'abord la puissance par unité de surface (qui correspond à la norme moyenne du vecteur de Poynting)

$$\mathcal{P}_s = \frac{\mathcal{P}}{S} = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$$

$$E_0^2 = 2\mu_0 c \mathcal{P}_s = 2\mu_0 c \frac{\mathcal{P}}{S}$$

$$E_0 = \sqrt{2\mu_0 c \frac{\mathcal{P}}{S}} = \sqrt{2 \times 4\pi \cdot 10^{-7} \times 3 \cdot 10^8 \times \frac{10^{-3}}{10^{-6}}} = 2 \cdot 10^2 \sqrt{2\pi \times 3} = 2 \cdot 10^2 \sqrt{6\pi} = 0,9 \text{ kV.m}^{-1}$$

On obtient une valeur de l'ordre de 1 kV.m^{-1} .

VI. Conversion d'énergie électromagnétique en énergie électrique

VI.1. Effet photoélectrique et modèle corpusculaire de la lumière

Longtemps les physiciens se sont interrogés sur la nature de la lumière. Newton et Descartes pensaient qu'elle était constituée de corpuscules. D'autres, comme Huyghens, estimaient que c'était une onde. Au début du dix-neuvième siècle, Young a mis en évidence le phénomène d'interférences lumineuses qui révèle le caractère ondulatoire de la lumière. Plus tard, avec Maxwell, la lumière rejoint la grande famille des ondes électromagnétiques. L'histoire aurait pu s'arrêter là... mais au début du vingtième siècle, la théorie ondulatoire ne permet pas d'expliquer l'effet photoélectrique. Pour l'interpréter, Einstein réintroduit en 1905 la notion de corpuscule associé à la lumière, qu'on appellera ensuite le photon. Il postule que la quantité d'énergie transportée par un photon est proportionnelle à la fréquence de l'onde :

Relation de Planck-Einstein

On peut associer à toute onde électromagnétique de fréquence ν des photons d'énergie

$$E = h\nu$$

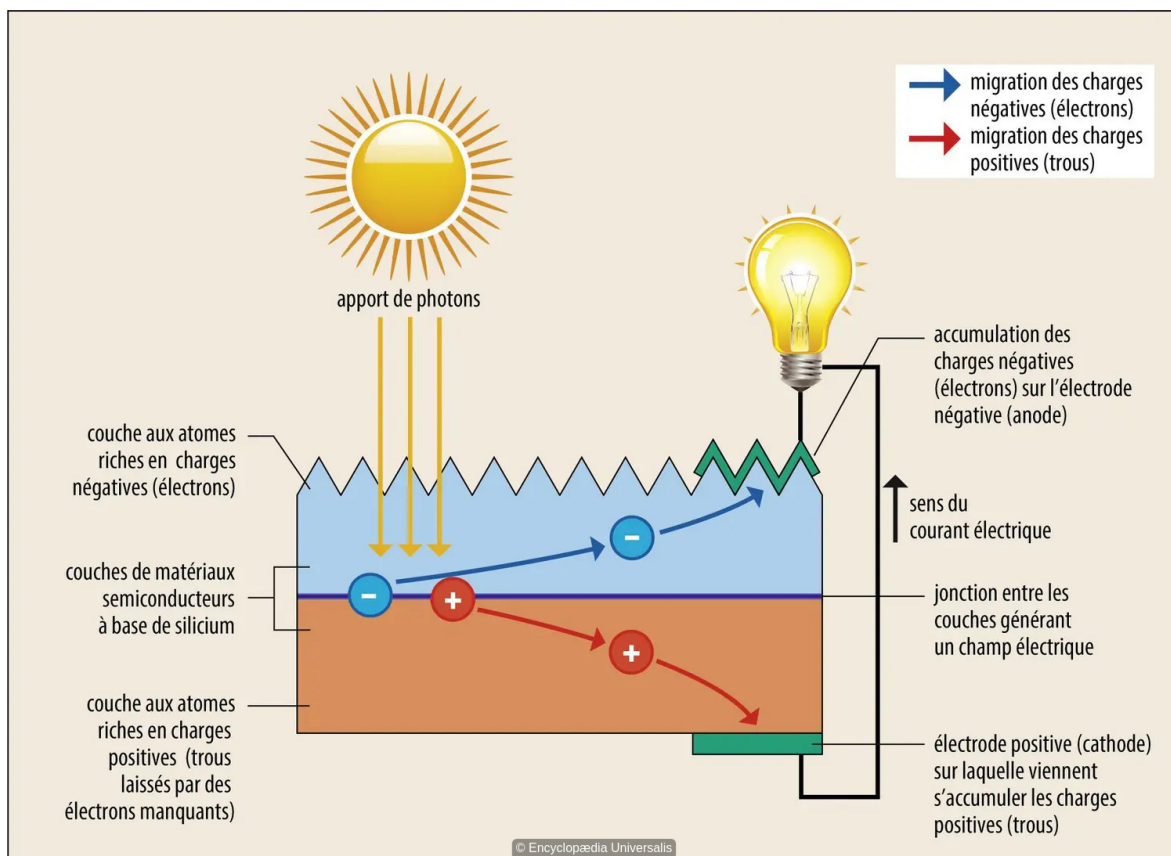
avec $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J.s la constante de Planck.

Présentation de l'effet photoélectrique : [animation effet photoelectrique](#)

Quand l'énergie des photons est suffisante (supérieure au travail d'extraction W) des électrons peuvent être extraits du métal.

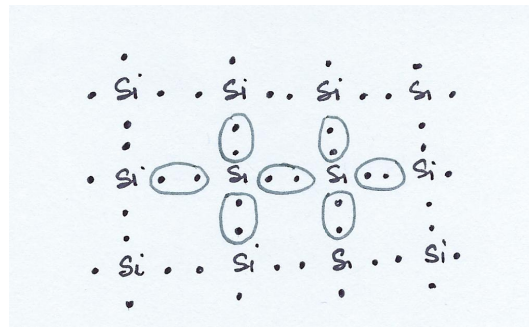
VI.2. Cellule photovoltaïque

consulter le lien : [principe de fonctionnement d'une cellule photovoltaïque](#)



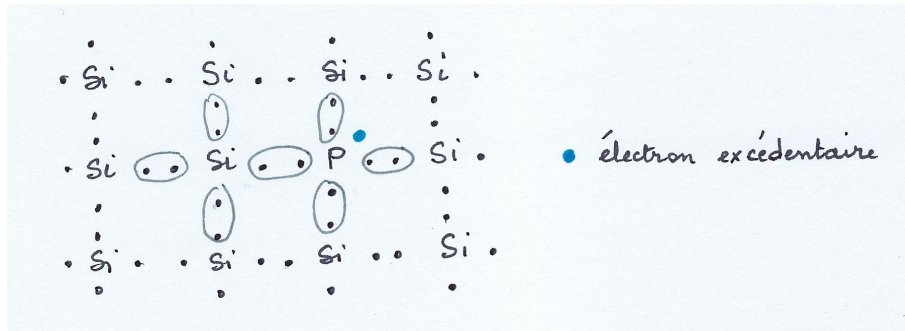
Une cellule photovoltaïque est constituée principalement de silicium qui est un semi-conducteur.

Comme le carbone, le silicium possède 4 électrons sur sa couche externe. Il tend à s'associer avec 4 atomes de silicium voisins pour former des liaisons et atteindre ainsi 8 électrons périphériques, ce qui correspond à une configuration stable.



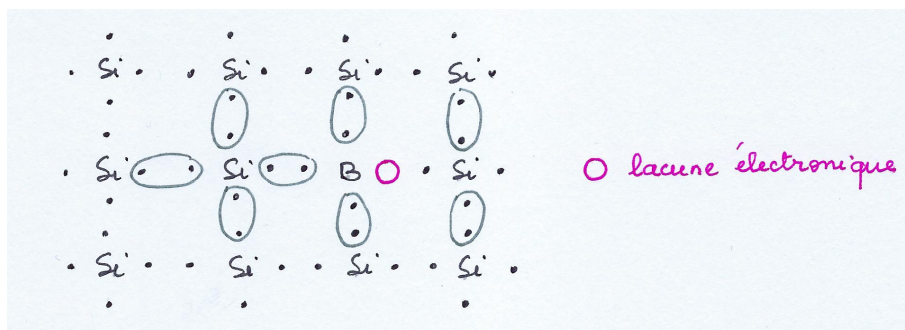
Dopage N

Si on introduit du phosphore, qui possède 5 électrons périphériques, un des électrons ne sera pas apparié. Le silicium dopé N dispose ainsi d'un réservoir d'électrons libres.



Dopage P

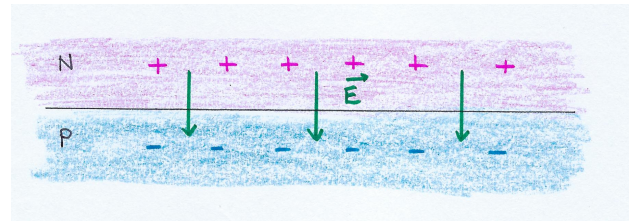
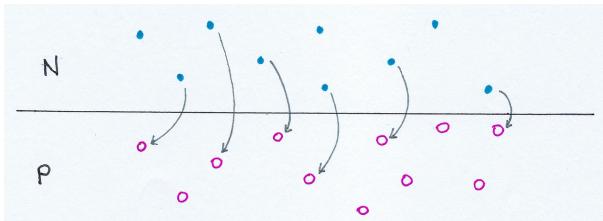
Si on introduit du bore, qui possède seulement 3 électrons périphériques, il apparaît une lacune qui ne demandera qu'à être comblée par un électron.



Jonction PN

Quand on met en contact une couche de silicium dopée N avec une couche dopée P, on observe à l'interface entre les deux milieux, une migration des électrons excédentaires de la zone N vers les lacunes de la zone P.

Le départ d'électrons de la zone N, initialement neutre, se traduit par l'apparition d'une charge volumique positive. Inversement, l'arrivée d'électrons dans la zone P crée une charge volumique négative. Ces charges créent un champ \vec{E} (orienté de la zone dopée N vers la zone dopée P). Ce champ s'oppose progressivement à la migration des électrons.



Pour approfondir : voir problème corrigé Mines-Ponts 2013 sur la jonction PN.

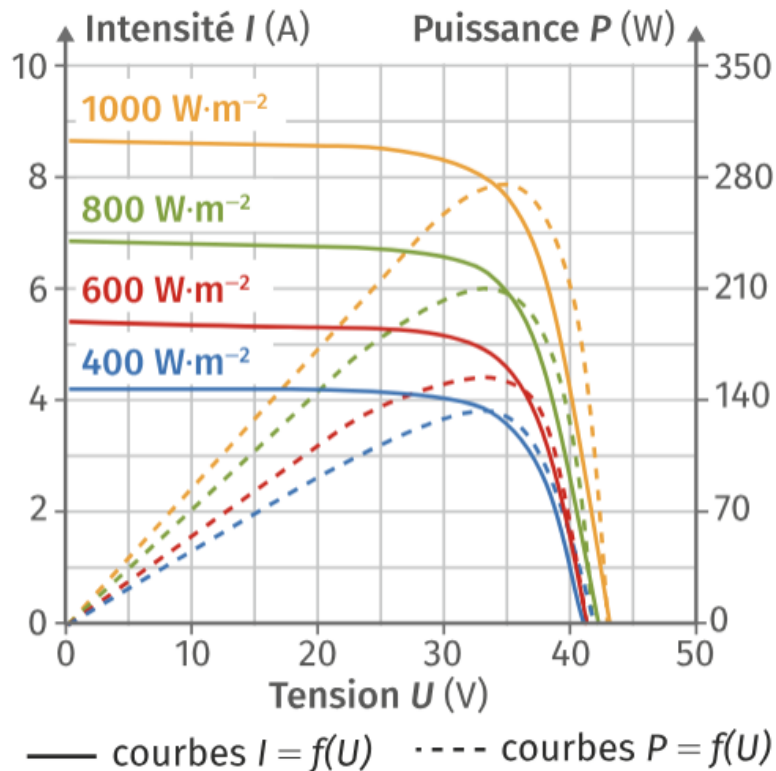
Cellule photovoltaïque

Lorsque le silicium est éclairé par des photons suffisamment énergétiques, un électron est arraché à un atome de silicium : il y a création d'une paire "électron + trous positif". Au niveau de la jonction PN, le champ électrique sépare l'électron du trou positif et un courant peut circuler.

On fabrique des panneaux solaires en associant en parallèle plusieurs branches contenant chacune un certain nombre de cellules en série.

VI.3. Rendement d'un panneau photovoltaïque

On souhaite installer, sur le toit d'une maison, des panneaux photovoltaïques de dimensions 1520 mm × 1475 mm dont les caractéristiques intensité-tension (en convention générateur) sont données dans le document ci-après. On se propose de déterminer le rendement de ces panneaux pour un flux lumineux surfacique φ de $1000 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.



<https://www.lelivrescolaire.fr/page/16377684>

1. Comment ont été tracées les courbes en pointillés ? Interpréter leur profil.
2. Déterminer la puissance maximale P_{max} délivrée par le panneau.
3. En déduire la tension U_m et l'intensité I_m au point de puissance maximale et vérifier la cohérence des mesures.
4. Déterminer la puissance lumineuse P_{lum} reçue par le panneau .
5. En déduire le rendement η du panneau photovoltaïque dans ces conditions.

12. Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide	
Force de Lorentz. Formes locales des équations de Maxwell dans le vide.	Simplifier les équations de Maxwell, fournies et admises, dans une zone de l'espace sans charges ni courants. Identifier les équations qui font apparaître un couplage entre les champs électrique et magnétique. Identifier et interpréter qualitativement les équations qui font apparaître un couplage entre les champs électrique ou magnétique et les distributions de charges ou de courant.
Équation de propagation des champs électriques et magnétique dans le vide. Cas des ondes planes.	Montrer que l'équation de propagation des champs électrique, fournie, se ramène à une équation de d'Alembert unidimensionnelle dans le cas d'une onde plane. Exprimer la célérité des ondes électromagnétiques en fonction des constantes fondamentales.
Onde électromagnétique plane progressive monochromatique polarisée rectilignement Vecteur d'onde, longueur d'onde.	Démontrer la relation de dispersion de l'onde. Exploiter l'expression du champ électrique d'une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement pour identifier la direction de propagation et la direction de polarisation
Spectre des ondes électromagnétiques.	Identifier en ordre de grandeur les intervalles en fréquence ou en longueur d'onde des domaines : ondes radio, infra-rouge, visible, ultraviolets, rayons X, rayons gamma.
Caractère transverse des champs. Relation entre le champ électrique, le champ magnétique et le vecteur d'onde d'une onde plane progressive monochromatique (relation de structure).	Démontrer le caractère transverse des champs électrique et magnétique dans le cas d'une onde plane. Établir la relation de structure dans le cas d'une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement. Exploiter la relation de structure pour déterminer le champ électrique connaissant le champ magnétique, ou réciproquement, pour une onde plane progressive monochromatique.
Densité volumique d'énergie électromagnétique et vecteur de Poynting. Équation locale de Poynting dans le vide. Puissance surfacique moyenne transportée par l'onde.	Exprimer la puissance rayonnée à travers une surface à l'aide du vecteur de Poynting. Associer la direction du vecteur de Poynting et la direction de propagation de l'onde. Citer quelques ordres de grandeurs de puissance surfacique (laser hélium-néon, flux solaire). Établir l'équation locale de Poynting unidimensionnelle pour une onde plane polarisée rectilignement dans une zone de l'espace sans charges ni courants. Admettre son expression la plus générale dans une zone de l'espace sans charges ni courants. Par analogie avec d'autres équations locales de conservation, faire le lien avec la conservation de l'énergie électromagnétique dans le vide.
Conversion d'énergie électromagnétique en énergie électrique.	Décrire l'effet photovoltaïque. À partir de la caractéristique courant-tension d'une cellule photovoltaïque, déterminer les valeurs de la tension et du courant qui maximisent la puissance électrique fournie. Déterminer la valeur du rendement maximum, les données nécessaires étant fournies.