

MF1 - Statique des fluides

Un fluide épouse la forme du récipient qui le contient : les gaz et les liquides sont des fluides.

L'expérience commune montre que l'air se raréfie en haut d'une montagne et que la pression augmente quand on plonge au fond d'une piscine.

On étudiera dans ce chapitre les propriétés des fluides au repos dans un référentiel galiléen en présence d'un champ de force extérieur, concrètement le champ de pesanteur, dans le but de déterminer le champ de pression.

I. Description d'un fluide

I.1. Libre parcours moyen

Les composants microscopiques de la matière sont animés de mouvements désordonnés qui s'amplifient lorsque la température augmente : c'est l'**agitation thermique**. Une des manifestation de l'agitation thermique est le mouvement brownien (voir chapitre Th1 II.2).

Dans un solide, les atomes ou molécules oscillent autour de leur position d'équilibre. En revanche, dans un liquide ou dans un gaz, les particules se déplacent en s'entrechoquant continuellement. On introduit alors la notion de libre parcours moyen.

On appelle **libre parcours moyen** la distance moyenne ℓ parcourue par une particule entre deux chocs successifs.

Ordres de grandeurs :

- Liquide

Évaluer l'ordre de grandeur de la distance moyenne entre deux molécules d'eau (en phase liquide) en fonction de ρ la masse volumique de l'eau, M sa masse molaire et \mathcal{N}_a le nombre d'Avogadro.

On cherche d'abord à calculer le volume occupé par une molécule d'eau :

1 mole d'eau occupe le volume $V_m = \frac{M}{\rho}$

Le volume occupé par une molécule vaut $\frac{V_m}{\mathcal{N}_a} = \frac{M}{\rho\mathcal{N}_a}$

On assimile ce volume à un cube de côté d . On a alors $\frac{V_m}{\mathcal{N}_a} = d^3$, d'où

$$d = \left(\frac{M}{\rho\mathcal{N}_a} \right)^{1/3} = 3.10^{-10} \text{ m}$$

Dans un liquide, le libre parcours moyen est de l'ordre de la distance intermoléculaire soit $\ell \simeq 10^{-10}$ m.

- Gaz

Évaluer la densité volumique de molécules n^* (c'est-à-dire le nombre de molécules par unité de volume) pour un gaz parfait à la température $T = 20^\circ\text{C}$ et sous la pression atmosphérique $P = 1$ bar. En déduire la distance moyenne interatomique.

D'après la loi des gaz parfait $PV = nRT$, avec n nombre de moles de gaz contenues dans le volume V . D'où $P = \frac{n}{V}RT = \frac{n^*}{\mathcal{N}_A}RT$. On en déduit

$$n^* = \frac{\mathcal{N}_A P}{RT} = \frac{6,02 \cdot 10^{23} \times 10^5}{8,31 \times 293} = 2,5 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

Le volume moyen par molécule vaut $1/n^*$ et donc, en reprenant le modèle cubique :

$$d = \left(\frac{1}{n^*} \right)^{\frac{1}{3}} = 3,4 \text{ nm}$$

On peut montrer, à l'aide d'un modèle dit des sphères dures, que le libre parcours moyen dans un gaz s'exprime sous la forme :

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{2} n^* \pi (2r)^2}$$

avec r le rayon d'une molécule modélisée par une sphère. Si on prend $2r = 10^{-10}$ m, on calcule :

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{2} \times 2,5 \cdot 10^{25} \times \pi \times 10^{-20}} \simeq 10^{-6} \text{ m} \simeq 1 \text{ } \mu\text{m}$$

Le libre parcours moyen d'un atome ou d'une molécule de gaz dans les conditions ambiantes est de l'ordre du micromètre.

I.2. Les différentes échelles d'approche

a) Échelle macroscopique

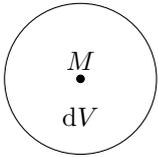
L'échelle macroscopique correspond à la taille caractéristique du système étudié. Par exemple si on considère l'air contenu dans la salle de cours, l'échelle macroscopique est de l'ordre de quelques mètres. Si on considère l'écoulement du sang dans un vaisseau sanguin, l'échelle macroscopique correspondra au diamètre du vaisseau. À cette échelle le milieu est continu.

b) Échelle microscopique

C'est l'échelle des composants élémentaires de la matière (atomes, molécules). L'ordre de grandeur de la taille d'un atome est de 10^{-10} m (soit de l'ordre de l'angström Å).

La mécanique statistique tend à expliquer les lois de la thermodynamique à partir de l'étude microscopique de ses composants. Leur nombre très élevé autorise un traitement statistique.

c) Échelle mésoscopique



C'est l'échelle intermédiaire. Soit dV un volume mésoscopique entourant le point M . Ce volume dV doit être

- ▷ suffisamment petit pour être assimilable à un point
- ▷ suffisamment grand pour contenir un grand nombre d'atomes.

On peut alors y définir localement les grandeurs statistiques intensives comme la pression et la température ainsi que la masse volumique.

$$\rho(M) = \frac{dm}{dV}$$

avec dm la masse de fluide contenue dans le volume élémentaire dV .

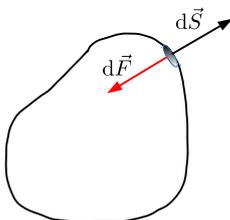
Concrètement, les dimensions du **volume mésoscopique** doivent être grandes devant le **libre parcours moyen** ℓ , donc de l'ordre de $10^2 \ell$:

- dans un liquide le diamètre du volume mésoscopique doit être de l'ordre de 10^{-8} m = 10 nm.
- dans un gaz le diamètre du volume mésoscopique doit être de l'ordre de $100 \text{ } \mu\text{m} \simeq 0,1$ mm.

II. Pression dans un fluide

II.1. Rappel

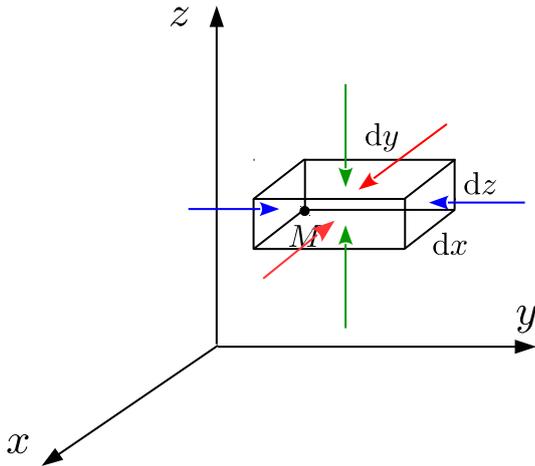
La pression est définie en tout point (à l'échelle mésoscopique) du fluide. On peut tracer une surface fictive délimitant un certain volume du fluide. La force de pression qu'exerce le fluide extérieur sur le fluide intérieur au niveau de l'élément de surface est de la forme :



$$d\vec{F} = -P d\vec{S}$$

cette définition est indépendante de la direction du vecteur $d\vec{S}$.

II.2. Équivalent volumique des forces de pression



On souhaite calculer la résultante des forces de pression extérieures s'exerçant sur un volume mésoscopique de fluide (également appelée *particule fluide*) de forme parallélépipédique de cotés dx , dy , dz , dont un des sommets est au point $M(x, y, z)$.

On considère qu'au premier ordre la pression est uniforme sur chacune des six faces.

On note $P(x, y, z)$ le champ de pression.

On rappelle l'expression de la différentielle d'une fonction de trois variables :

$$df = f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

On commence par comptabiliser les forces parallèles à \vec{u}_x :

$$d\vec{F}_x = P(x, y, z) dydz\vec{u}_x + P(x + dx, y, z) dydz(-\vec{u}_x)$$

$$d\vec{F}_x = -(P(x + dx, y, z) - P(x, y, z)) dydz\vec{u}_x$$

$$d\vec{F}_x = -\frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz \vec{u}_x$$

on calcule de même les forces sur \vec{u}_y :

$$d\vec{F}_y = P(x, y, z) dx dz \vec{u}_y + P(x, y + dy, z) dx dz (-\vec{u}_y)$$

$$d\vec{F}_y = -\frac{\partial P}{\partial y} dy dx dz \vec{u}_y$$

et enfin sur \vec{u}_z :

$$d\vec{F}_z = P(x, y, z) dx dy \vec{u}_z + P(x, y, z + dz) dx dy (-\vec{u}_z)$$

$$d\vec{F}_z = -\frac{\partial P}{\partial z} dz dx dy \vec{u}_z$$

La résultante des forces s'exerçant sur le volume élémentaire est donc

$$d\vec{F} = d\vec{F}_x + d\vec{F}_y + d\vec{F}_z = -\left(\frac{\partial P}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{u}_z\right) dx dy dz$$

$$d\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} P dV$$

avec $\overrightarrow{\text{grad}} P = \frac{\partial P}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{u}_z$ et $dV = dx dy dz$ le volume élémentaire de la particule fluide.

Cette relation est généralisable à un volume mésoscopique de forme quelconque.

Un volume mésoscopique dV de fluide subit de la part du fluide extérieur des forces de pression dont la résultante $d\vec{F}$ a pour expression :

$$d\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} P dV$$

avec, en coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{\text{grad}} P = \frac{\partial P}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{u}_z$

II.3. Propriétés de l'opérateur gradient

Voir annexe mathématique : l'opérateur gradient.

Retenir :

- $\vec{\text{grad}} P$ est un champ vectoriel qui caractérise les variations spatiales du champ scalaire P . Par définition

$$dP = \vec{\text{grad}} P \cdot d\vec{OM}$$

- $\vec{\text{grad}} P$ est perpendiculaire aux surfaces isobares ($P = cte$) et orienté vers les valeurs de pression P croissantes.
- en coordonnées cartésiennes : $\vec{\text{grad}} P = \frac{\partial P}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{u}_z$

On a établi $d\vec{F} = -\vec{\text{grad}} P dV$: le signe $-$ permet de vérifier que la force est dans la direction opposée du gradient, c'est à dire dirigée des hautes pressions vers les basses pressions.

II.4. Loi de la statique des fluides

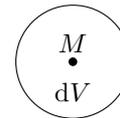
On considère un volume mésoscopique en équilibre dans un référentiel galiléen sous l'action des forces de pression et de son poids.

Système : volume mésoscopique dV

Référentiel : terrestre galiléen

Bilan des forces : poids $dm\vec{g} = \rho dV \vec{g}$

résultantes des forces de pression : $-\vec{\text{grad}} P dV$



À l'équilibre dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\rho \vec{g} dV - \vec{\text{grad}} P dV = \vec{0}$$

$$(-\vec{\text{grad}} P + \rho \vec{g}) dV = \vec{0}$$

$$\vec{\text{grad}} P = \rho \vec{g}$$

Le champ de pression P d'un fluide au repos dans un référentiel galiléen et soumis à un champ gravitationnel \vec{g} , vérifie la **loi de la statique des fluides** :

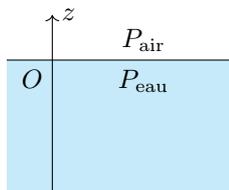
$$\vec{\text{grad}} P = \rho \vec{g}$$

avec ρ le champ de masse volumique. C'est une équation locale, valable à l'échelle mésoscopique.

Condition aux limites :

À l'interface entre deux fluides au repos la pression est continue.

Exemple :



en $z = 0$ $P_{\text{air}}(0) = P_{\text{eau}}(0)$

III. Applications aux fluides incompressibles

Contrairement au volume d'un gaz, le volume d'un liquide varie très peu avec la pression.

Pour une phase condensée idéale $\alpha = 0$ et $\chi_T = 0$. Le volume est invariant et, par conséquent la masse volumique ρ est constante.

Exemple : prise en compte de la compressibilité de l'eau

Le coefficient de compressibilité isotherme de l'eau vaut $\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = 5.10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$.

Considérons la variation de volume à température fixée ΔV associée à la variation de pression $\Delta P = 100 \text{ bar}$ (soit environ la pression à 1000 m de profondeur). La variation de volume étant faible on peut écrire :

$$\chi_T \simeq -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta P}$$

$$\frac{\Delta V}{V} \simeq -\chi_T \Delta P \simeq -5.10^{-10} \times 10^7 = -5.10^{-3}$$

On remarque que $\Delta V < 0$: le volume diminue quand la pression augmente. On obtient une variation relative inférieure à 1%.

Remarque : calcul non approché

On se place à température fixée : $dV = \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP$ (var $dT = 0$).

$$dV = -V \chi_T dP$$

$$\frac{dV}{V} = -\chi_T dP$$

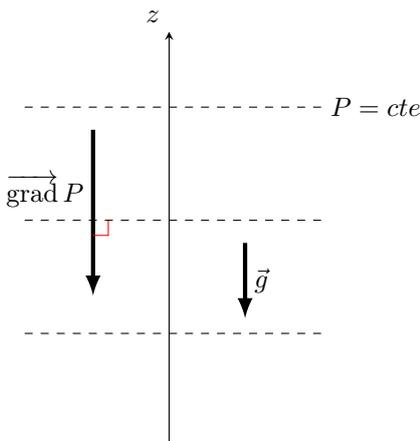
$$\ln \left(\frac{V}{V_0} \right) = -\chi_T (P - P_0)$$

$$\frac{V}{V_0} = e^{-\chi_T \Delta P} = 0,995 \text{ pour } \Delta P = 100 \text{ bar.}$$

On retrouve le même résultat.

On considérera donc dans toutes cette partie les **liquides incompressibles** : $\rho = cte$

III.1. Champ de pression



$$P(M) = P(x, y, z)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = \rho \vec{g}$$

Le gradient de pression est donc colinéaire et de même sens que \vec{g} : les surfaces isobares sont donc des plans horizontaux. **La pression ne dépend donc que de z et la pression augmente lorsque la profondeur augmente.**

La condition d'équilibre d'une particule fluide se traduit par la relation de la statique des fluides :

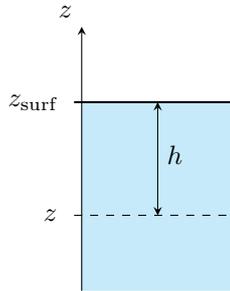
$$\overrightarrow{\text{grad}} P = \rho \vec{g}$$

On multiplie scalairement chaque membre de l'équation par le déplacement élémentaire $d\vec{OM}$:

$$\begin{aligned} \vec{\text{grad}}P \cdot d\vec{OM} &= \rho \vec{g} \cdot d\vec{OM} \\ dP &= -\rho g \vec{u}_z \cdot (dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z) \\ dP &= -\rho g dz \\ d(P + \rho g z) &= 0 \\ P(z) + \rho g z &= Cte \end{aligned}$$

Cette dernière relation est parfois appelée le théorème de Pascal. Elle est valable pour un fluide incompressible avec l'axe Oz orienté suivant la verticale ascendante ($z \uparrow$).

En général, on détermine la constante à partir de la condition aux limites en surface. Si on note P_{surf} la pression de surface, et z_{surf} la position de la surface.



$$\begin{aligned} P(z) + \rho g z &= P(z_{\text{surf}}) + \rho g z_{\text{surf}} \\ P(z) &= P(z_{\text{surf}}) + \rho g (z_{\text{surf}} - z) \\ P(z) &= P(z_{\text{surf}}) + \rho g h \end{aligned}$$

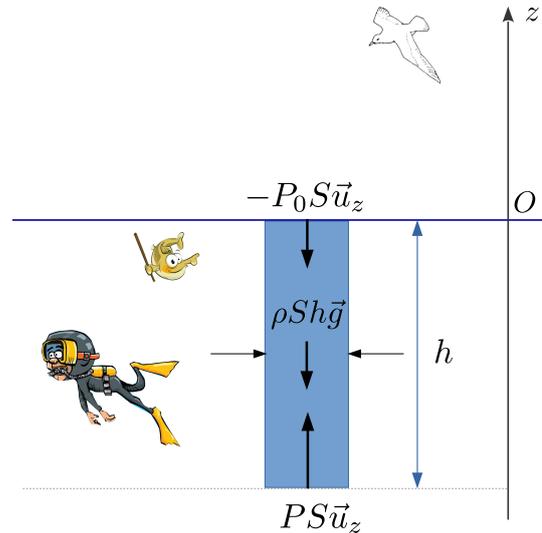
On considère l'équilibre d'une colonne de fluide de section S .

Bilan des forces :

- force de pression sur la surface supérieure : $-P_0 S \vec{u}_z$
- force de pression sur la surface inférieure : $PS \vec{u}_z$
- poids de la colonne de fluide : $\rho Sh \vec{g} = -\rho Sh g \vec{u}_z$
- forces de pression latérale : de composante nulle sur \vec{u}_z . Globalement ces forces se compensent.

On projette la condition d'équilibre sur \vec{u}_z :

$$\begin{aligned} -P_0 S - \rho Sh g + PS &= 0 \\ P &= P_0 + \rho g h \end{aligned}$$



Lorsque la profondeur augmente la surpression $\rho g h$ correspond au poids par unité de surface de la colonne de fluide.

$g = 10 \text{ m.s}^{-2}$; pour l'eau $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

À une profondeur $h = 10 \text{ m}$: $P - P_0 = \rho g h = 10^3 \times 10 \times 10 = 10^5 \text{ Pa}$.

Les plongeurs ont l'habitude de dire que la pression augmente d'une atmosphère tous les dix mètres.

Remarque : autre mode de calcul pour retrouver la relation de Pascal.

$$\begin{aligned} \vec{\text{grad}}P &= \rho \vec{g} \\ \frac{\partial P}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{u}_z &= -\rho g \vec{u}_z \text{ avec } z \uparrow \end{aligned}$$

En projetant sur \vec{u}_x et \vec{u}_y : $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$. La pression ne dépend donc que de z : $P = P(z)$ et on peut

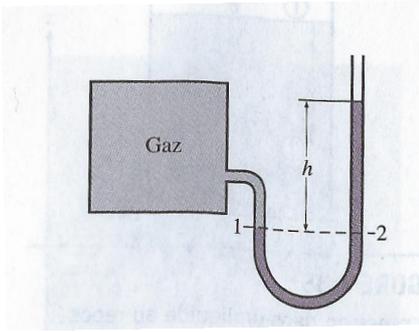
alors écrire $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{dP}{dz}$.

En projetant sur \vec{u}_z : $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{dP}{dz} = -\rho g$

En intégrant par rapport à z : $P(z) = -\rho g z + Cte$

$$P(z) + \rho g z = Cte$$

Principe d'un manomètre :



On utilise un manomètre pour mesurer la pression du gaz contenu dans un réservoir (la masse volumique du gaz étant beaucoup plus faible que celle d'un liquide on considère que la pression est la même en tout point du gaz). Le manomètre comporte un tube en U contenant un liquide (eau, huile, alcool, mercure)...

Les points 1 et 2 étant à la **même altitude** pour le **même fluide** $P_1 = P_2$.

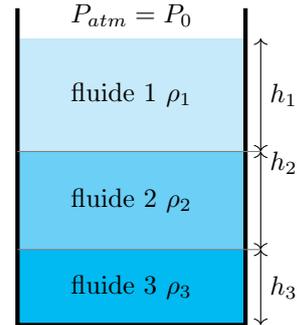
Si on note P_0 la pression atmosphérique qui s'exerce sur la surface sur liquide on a $P_2 = P_0 + \rho gh$.

$$P_1 = P_2 = P_0 + \rho gh$$

Cas où on superpose plusieurs couches de fluide non miscibles :

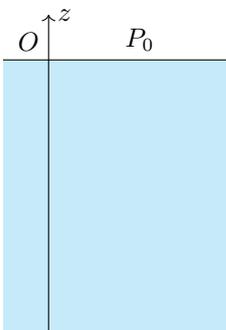
Déterminer la pression P_f au fond du récipient sachant que :

- la variation de pression engendrée par une colonne de hauteur h pour un fluide de masse volumique ρ vaut ρgh
- la pression croît avec la profondeur
- deux points placés sur la même horizontale dans le même fluide se trouve à la même pression

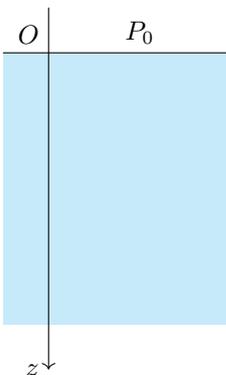


$$P_f = P_0 + \rho_1 gh_1 + \rho_2 gh_2 + \rho_3 gh_3$$

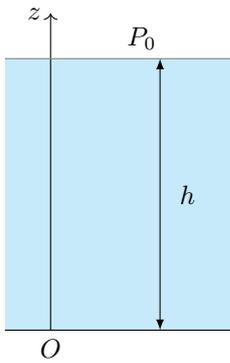
Savoir calculer le champ de pression $P(z)$ dans les trois configurations suivantes :



$$P(z) = P_0 - \rho gz$$



$$P(z) = P_0 + \rho gz$$

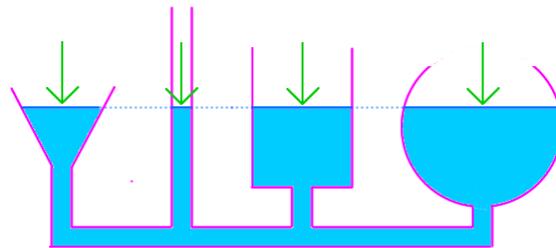


$$P(z) = P_0 + \rho g(h - z)$$

III.2. Quelques exemples

Principe des vases communicants

Les isobares coïncident avec des plans horizontaux $z = cte$. Les différentes surfaces libres du liquide coïncident avec l'isobare $P = P_0$ (P_0 correspondant à la pression atmosphérique) et sont donc toutes au même niveau.



Principe des vases communicants

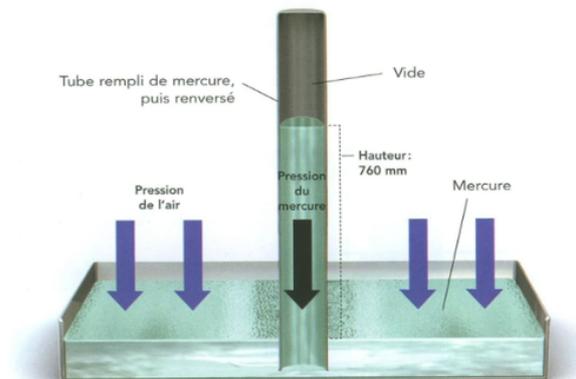
Baromètre à mercure

Si on retourne un tube rempli de mercure sur une cuve également remplie de mercure, le niveau de mercure dans le tube fini par se stabiliser à une hauteur h . Si on considère que la pression au dessus du mercure est nulle, et si on note P_0 la pression atmosphérique appuyant sur la surface de mercure en contact avec l'air extérieur, on peut écrire

$$P_0 = \rho_{Hg}gh$$

L'atmosphère normale (symbole atm) correspond à la pression d'une hauteur de 760 mmHg à 0°C, sous l'accélération normale $g = 9,80665 \text{ m.s}^{-2}$, avec $\rho_{Hg} = 13,59508 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

$$1 \text{ atm} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ Torr}$$



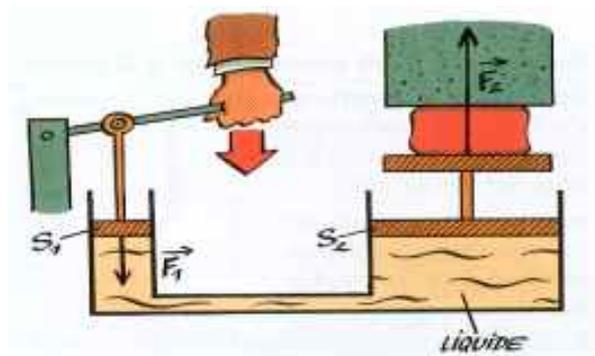
Presse hydraulique

Les deux pistons étant à la même hauteur, ils sont à la même pression P .

$$P = \frac{\|\vec{F}_1\|}{S_1} = \frac{\|\vec{F}_2\|}{S_2}$$

$$\|\vec{F}_2\| = \frac{S_2}{S_1} \|\vec{F}_1\|$$

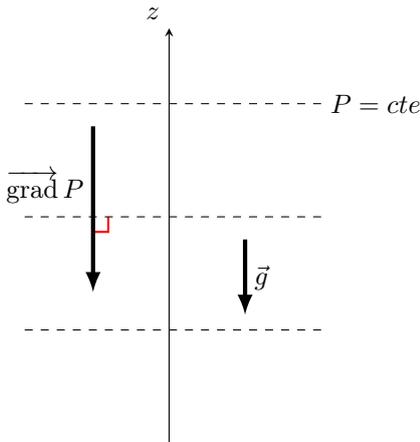
$$\text{Pour } S_2 \gg S_1 \quad \|\vec{F}_2\| \gg \|\vec{F}_1\|$$



Principe d'une presse hydraulique

IV. Applications aux fluides compressibles

IV.1. Modèle de l'atmosphère isotherme



Hypothèses :

- l'air est assimilable à un gaz parfait
- la température de l'air est uniforme $T = T_0$
- \vec{g} est supposé uniforme à l'échelle de l'atmosphère

On projette la relation de la statique des fluides sur un déplacement élémentaire $d\vec{OM}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} P \cdot d\vec{OM} &= \rho \vec{g} \cdot d\vec{OM} \\ dP &= -\rho g dz \quad (E) \end{aligned}$$

Un volume mésoscopique dV , de masse dm vérifie la loi des gaz parfaits :

$$PdV = \frac{dm}{M} RT \text{ où } M \text{ désigne la masse molaire de l'air.}$$

$$\text{D'où } P = \frac{dm}{dV} \frac{RT}{M} = \rho \frac{RT}{M}. \text{ Ainsi } \rho = \frac{MP}{RT}.$$

Dans le cadre de l'atmosphère isotherme $T = T_0$. En reportant dans (E) :

$$\begin{aligned} dP &= -\frac{MP}{RT_0} g dz \\ \frac{dP}{P} &= -\frac{Mg}{RT_0} dz \end{aligned}$$

On intègre ensuite entre l'altitude $z = 0$ où $P(0) = P_0$ et l'altitude z :

$$\begin{aligned} \int_{P_0}^{P(z)} \frac{dP}{P} &= -\frac{Mg}{RT_0} \int_0^z dz \\ \ln \frac{P(z)}{P_0} &= -\frac{Mg}{RT_0} z \end{aligned}$$

$$P(z) = P_0 e^{-\frac{Mgz}{RT_0}}$$

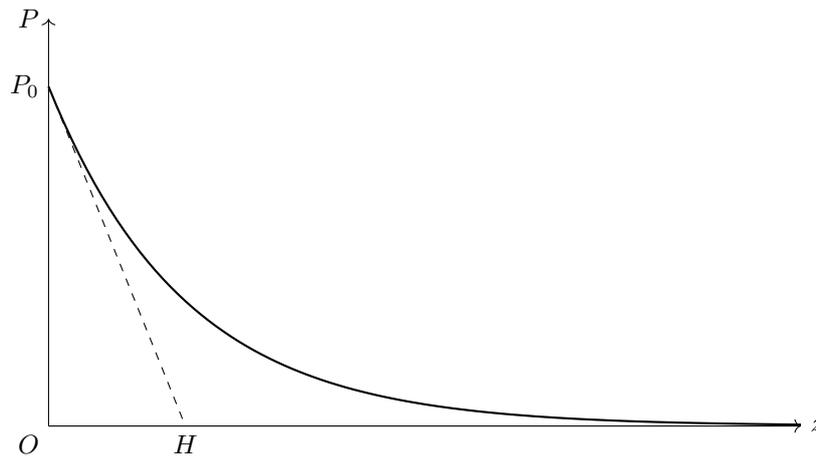
que l'on peut écrire sous la forme $P(z) = P_0 e^{-\frac{z}{H}}$ avec $H = \frac{RT_0}{Mg}$.

H est homogène à une longueur. Pour $z > 5H$ on peut considérer que la pression est nulle. $5H$ est une évaluation de l'épaisseur de l'atmosphère.

Application numérique pour $T_0 = 15^\circ\text{C}$, $M = 29 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$: $H = \frac{8,3 \times 288}{29 \cdot 10^{-3} \times 9,8} = 8,4 \text{ km}$.

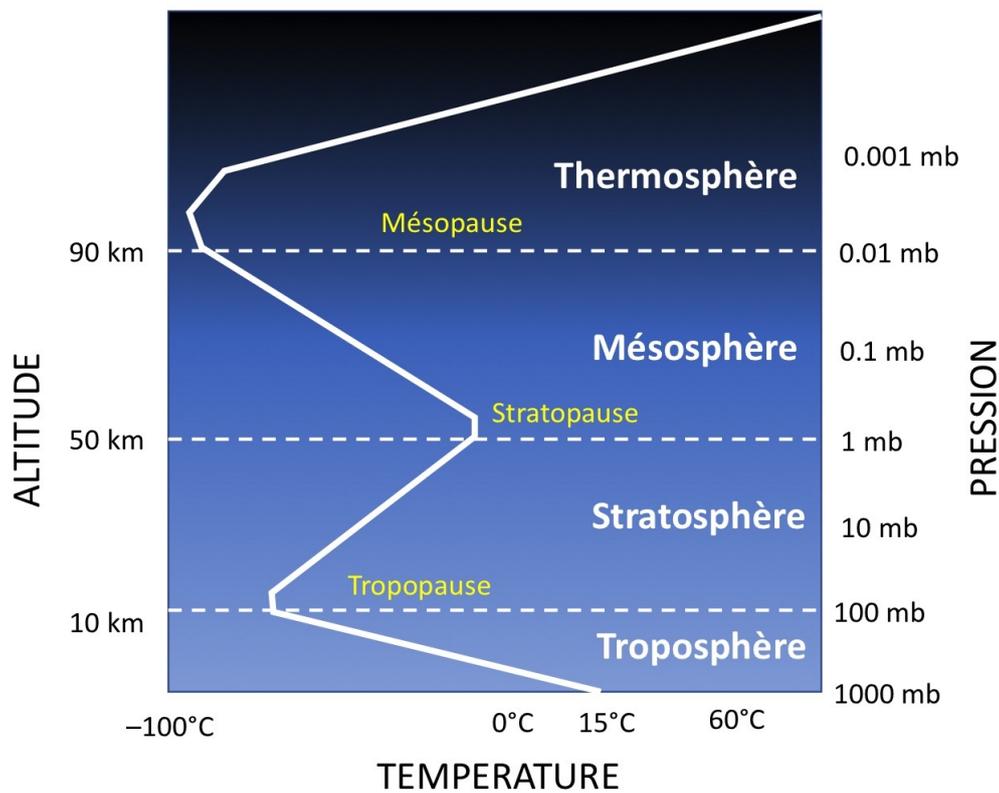
Pour des systèmes de dimensions très inférieure à H on pourra considérer la pression uniforme. On peut par exemple considérer la pression uniforme dans toute la salle de classe.

L'épaisseur de l'atmosphère est de l'ordre d'une quarantaine de kilomètres. Cette valeur est très inférieure à la valeur du rayon de la Terre : l'hypothèse g uniforme à l'échelle de l'atmosphère est donc bien vérifiée.



Variation de la pression avec l'altitude

Pour un modèle plus précis d'atmosphère on peut tenir compte de la variation de température avec l'altitude.



Profil vertical de température dans l'atmosphère.

voir également :

<http://education.meteofrance.fr/dossiers-thematiques/le-fonctionnement-de-l-atmosphere/la-composition-et-la-structure-de-latmosphere>

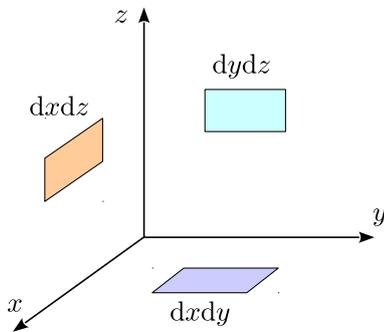
V. Intégrales surfaciques

V.1. Éléments de surfaces

On admet la relation suivante :

$$\int_{x=a}^b \int_{y=c}^d f(x)g(y)dx dy = \int_a^b f(x)dx \int_c^d g(y)dy$$

- Éléments de surface en coordonnées cartésiennes : $d\vec{OM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$:

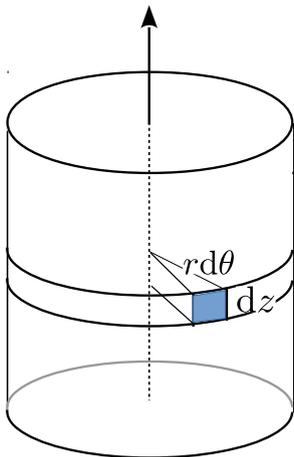


On a les diverses combinaisons :

$$dS = dxdy \quad dS = dxdz \quad dS = dydz$$

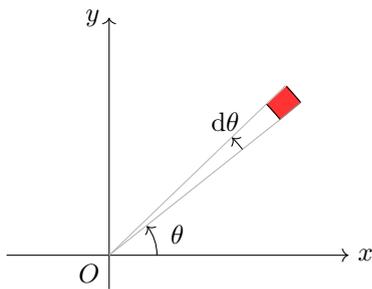
Application : calculer la surface d'un rectangle de côté (a, b) .

- Éléments de surface en coordonnées cylindriques : $d\vec{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$

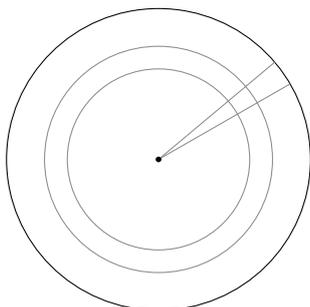


$$dS = rd\theta dz$$

Application : calculer la surface d'un cylindre de rayon r et de hauteur h .



$$dS = rd\theta dr$$

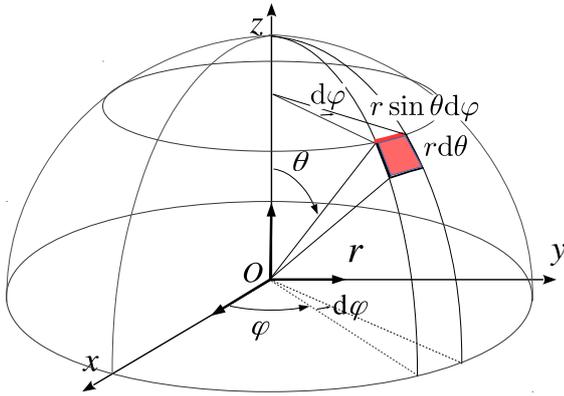


Application : retrouver la surface d'un disque de rayon R .

$$S = \iint_{\text{disque}} dS = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R r d\theta dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr$$

$$S = 2\pi \frac{R^2}{2} = \pi R^2$$

- Éléments de surface en coordonnées sphériques : $d\vec{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$



$$dS = r d\theta r \sin\theta d\varphi$$

Application : retrouver la surface d'une sphère de rayon R

$$S = \iint_{\text{Sphère}} dS = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} R d\theta R \sin\theta d\varphi$$

$$S = R^2 \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

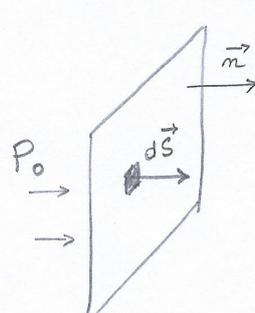
$$S = R^2 \times [-\cos\theta]_0^{\pi} \times 2\pi$$

$$S = 2\pi R^2 \times (-\cos\pi + \cos 0)$$

$$S = 4\pi R^2$$

V.2. Résultantes de forces de pression sur une surface

a) Rappel : Résultantes des forces de pression uniforme sur une surface plane



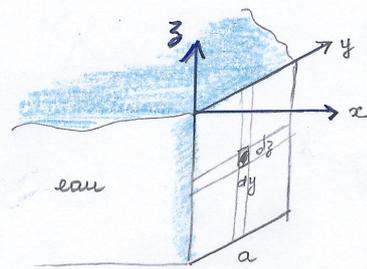
The diagram shows a flat surface with a normal vector \vec{n} pointing to the right. A pressure force P_0 is shown acting on the surface from the left. A small area element dS is also indicated.

$$d\vec{F} = P_0 dS \vec{n}$$

$$\vec{F} = \iint_S P_0 dS \vec{n} = P_0 \left(\iint_S dS \right) \vec{n}$$

$$\vec{F} = P_0 S \vec{n}$$

b) Résultantes des forces de pression sur un mur de barrage plan



The diagram shows a dam wall of height h and width a . The water level is at height $z=0$. A coordinate system is shown with x horizontal, y vertical, and z along the dam wall. A small area element dS is shown on the dam wall.

On considère un mur de barrage de largeur a et de hauteur h .

• Champ de pression

$$\text{grad } P = \rho \vec{g}$$

$$\text{grad } P \cdot d\vec{m} = -\rho g \vec{u}_z \cdot d\vec{m}$$

$$dP = -\rho g dz$$

$$P = -\rho g z + c_1$$

z=0 $P(0) = P_0 = c_1$ d'où $P(z) = P_0 - \rho g z$

$$\begin{cases} d\vec{F}_{\text{eau}} = (P_0 - \rho g z) dS \vec{u}_x \\ d\vec{F}_{\text{air}} = -P_0 dS \vec{u}_x \end{cases} \quad \text{avec } dS = dy dz$$

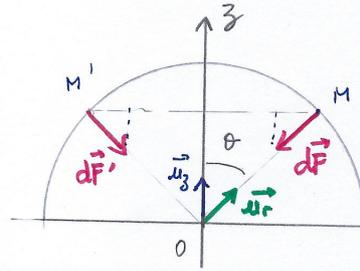
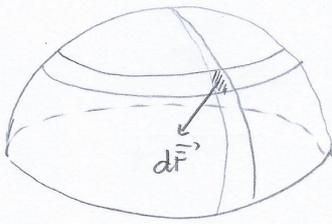
$$d\vec{F} = d\vec{F}_{\text{eau}} + d\vec{F}_{\text{air}} = (P_0 - \rho g z - P_0) dS \vec{u}_x = -\rho g z dS \vec{u}_x$$

$$\vec{F} = \iint d\vec{F} = \int_{y=0}^a \int_{z=-h}^0 -\rho g z dy dz \vec{u}_x$$

$$\vec{F} = -\rho g \int_0^a dy \int_{-h}^0 z dz \vec{u}_x = -\rho g a \left[\frac{z^2}{2} \right]_{-h}^0 \vec{u}_x$$

$$\vec{F} = + \rho g a \frac{h^2}{2} \vec{u}_x$$

c) Hémisphères de Magdebourg



On calcule la résultante des forces de pression uniforme P_0 sur un hémisphère -

$$d\vec{F} = -P_0 dS \vec{u}_n \quad \text{avec} \quad dS = R d\theta R \sin\theta d\varphi$$

Si on considère les forces $d\vec{F}$ et $d\vec{F}'$ s'exerçant sur deux surfaces diamétralement opposées on constate que par symétrie leur résultante est parallèle à \vec{u}_z . Ainsi

$$\vec{F} = \iint_{\Sigma} -P_0 dS \vec{u}_n = F \vec{u}_z \quad (\text{avec } F < 0)$$

$$F = \vec{F} \cdot \vec{u}_z = \iint_{\Sigma} -P_0 dS \vec{u}_n \cdot \vec{u}_z \quad \text{on projette sur } \vec{u}_z \text{ avant d'intégrer}$$

$$F = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} -P_0 \underbrace{R d\theta R \sin\theta d\varphi}_{dS} \underbrace{\cos\theta}_{\vec{u}_z \cdot \vec{u}_n}$$

$$F = -P_0 R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta d\theta$$

$$F = -P_0 R^2 2\pi \left[\frac{\sin^2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -P_0 R^2 \pi$$

$$\underline{\vec{F} = -\pi R^2 P_0 \vec{u}_z}$$

Dans l'expérience historique réalisée par Otto von Guericke en 1656 à Magdebourg, deux attelages de 16 chevaux au total tentèrent en vain de séparer deux hémisphères plaqués l'un contre l'autre sous l'effet de la pression atmosphérique, la sphère ayant été préalablement vidée de son air.



Reproduction miniature des deux hémisphères.



Autre forme de l'expérience.

Bilan :

Pour calculer la résultante des forces de pression \vec{F} sur une surface Σ

$$\vec{F} = \iint_{\Sigma} -Pd\vec{S}$$

avec $d\vec{S}$ le vecteur surface élémentaire orienté de la surface vers le fluide,

- faire l'étude des symétries et en déduire la direction \vec{u} de la résultante des forces de pression $\vec{F} = F\vec{u}$
- projeter sur \vec{u} avant d'intégrer :

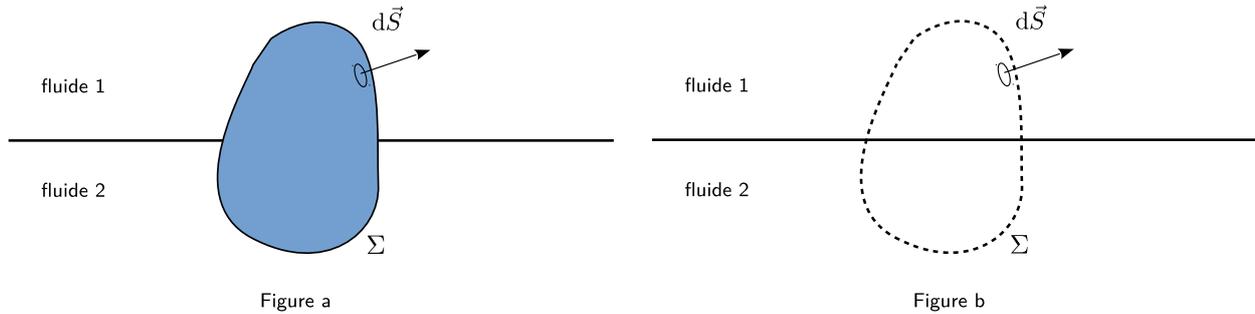
$$F = \iint_{\Sigma} -Pd\vec{S} \cdot \vec{u}$$

VI. Équilibre d'un solide dans un fluide

VI.1. Poussée d'Archimède

On considère un fluide, ou plusieurs fluides non miscibles, à l'équilibre dans un référentiel supposé galiléen. On souhaite calculer la résultante des forces de pression s'exerçant sur la surface Σ d'un solide **totalemt immergé** (voir figure a). Par définition cette force s'appelle la **poussée d'Archimède**.

$$\vec{\pi}_a = \iint_{\Sigma} -P d\vec{S}$$



On considère comme système le fluide qui occupait le même volume que le solide (voir figure b). Il est soumis à :

- son poids : $\vec{\pi}$
- la résultante des forces de pression s'exerçant sur sa surface : $\iint_{\Sigma} -Pd\vec{S}$.

À l'équilibre, dans un référentiel galiléen :

$$\vec{\pi} + \iint_{\Sigma} -Pd\vec{S} = \vec{0}$$

Si on suppose que l'introduction du solide ne modifie pas le champ de pression dans le fluide au repos alors

$$\iint_{\Sigma} -Pd\vec{S} = \vec{\pi}_a$$

On déduit alors de la condition d'équilibre :

$$\vec{\pi}_a = -\vec{\pi}$$

La poussée d'Archimède correspond donc à l'opposé du poids du volume de fluide déplacé.

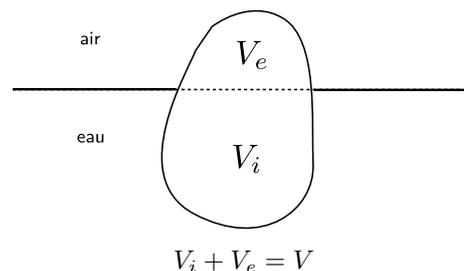
Tout corps plongé dans un liquide subit une force de poussée ascendante égale à l'opposé du poids du volume de fluide déplacé et qui s'applique en C centre de gravité du fluide déplacé.

VI.2. Applications

• Condition pour qu'un corps flotte

On considère un corps de volume V à l'équilibre à l'interface eau-air. On note

- ρ la masse volumique moyenne du corps flottant
- ρ_e la masse volumique de l'eau
- ρ_a la masse volumique de l'air
- V_i le volume de la partie immergée
- V_e le volume de la partie émergée



On cherche à déterminer V_i le volume immergé.

Le solide est soumis à :

- son poids : $\rho V \vec{g}$
- la résultante des forces de pression (=poussée d'Archimède) : $\vec{\pi}_a = -(\rho_a V_e \vec{g} + \rho_e V_i \vec{g})$

À l'équilibre :

$$\begin{aligned} \rho V \vec{g} - (\rho_a V_e \vec{g} + \rho_e V_i \vec{g}) &= \vec{0} \\ \rho V &= \rho_a V_e + \rho_e V_i \end{aligned}$$

On peut alors calculer le rapport $\frac{V_i}{V}$:

$$\rho V = \rho_a (V - V_i) + \rho_e V_i$$

$$V_i = \frac{\rho - \rho_a}{\rho_e - \rho_a} V$$

En général $\rho \gg \rho_a$ et $\rho_e \gg \rho_a$: $V_i \simeq \frac{\rho}{\rho_e} V$.

Exemple : glaçon flottant dans l'eau $\rho_{\text{glace}} = 0,91.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, $V_i = 0,91V$.

Le solide restera à l'interface eau-air tant que

$$0 < V_i < V$$

$$0 < \frac{\rho - \rho_a}{\rho_e - \rho_a} < 1$$

$$0 < \frac{\rho - \rho_a}{\rho_e - \rho_a}$$

$\rho_e - \rho_a > 0$ donc $\rho - \rho_a > 0$, $\rho > \rho_a$.

$$\frac{\rho - \rho_a}{\rho_e - \rho_a} < 1$$

$$\rho - \rho_a < \rho_e - \rho_a$$

$$\rho < \rho_e$$

Pour que le corps flotte à l'interface eau-air sa masse volumique ρ doit vérifier

$$\rho_a < \rho < \rho_e$$

Si $\rho < \rho_a \Rightarrow$ ascension dans l'air

Si $\rho > \rho_e \Rightarrow$ le corps coule

- Thermomètre de Galilée



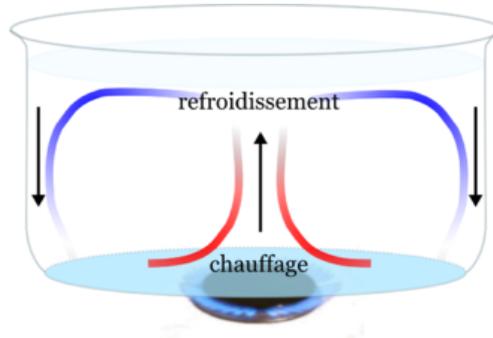
Quand la température augmente, le liquide se dilate (alors que le volume des billes ne change pratiquement pas). Sa masse volumique diminue et donc la poussée d'Archimède également. Les billes les plus lourdes coulent.

- Aérostat

On utilise soit des ballons fermés remplis d'un gaz plus léger que l'air (en général de l'hélium), soit des ballons ouverts contenant de l'air que l'on chauffe. Le ballon pourra monter lorsque le poids du volume d'air déplacé par le ballon sera supérieur au poids du gaz contenu dans le ballon auquel s'ajoute le poids de l'équipement (enveloppe du ballon + nacelle + passagers).

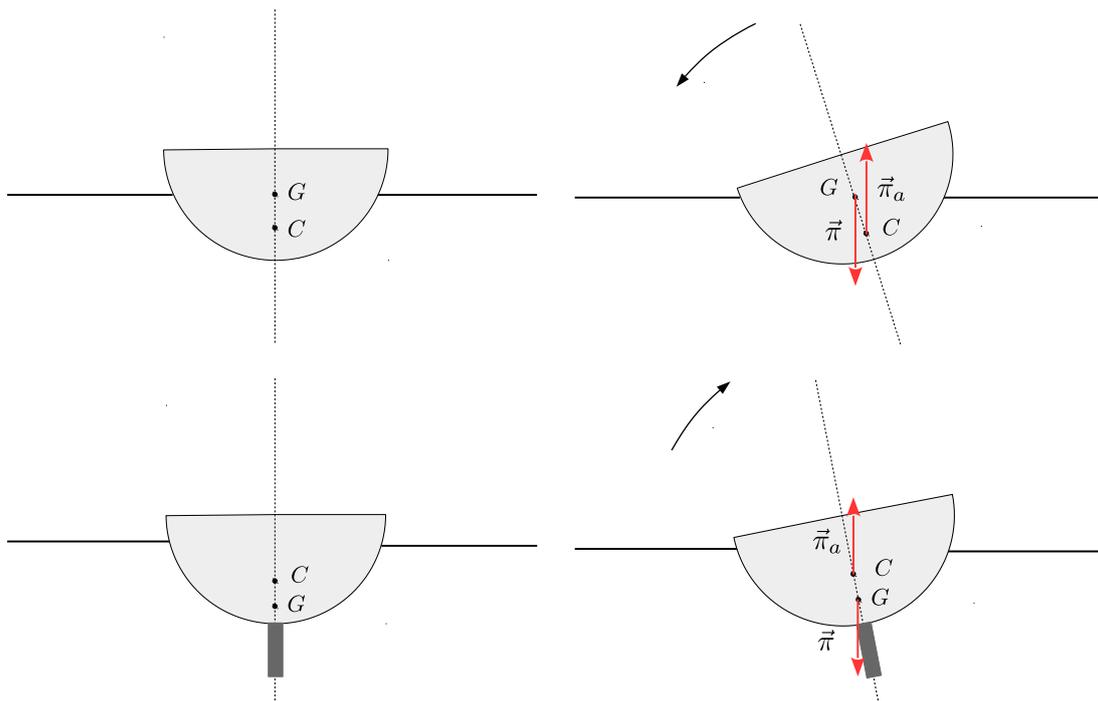
- Convection

La masse volumique du liquide chaud est plus faible que la masse volumique du liquide froid : le liquide chaud monte au niveau du chauffage et le liquide froid descend en périphérie.



Les mouvements de convections existent dans l'océan (circulation thermohaline), dans l'atmosphère ainsi que dans le manteau terrestre.

- Stabilité d'un corps flottant



On constate que la stabilité est assurée lorsque le centre de gravité G de l'objet flottant est situé en dessous du centre de poussée C .

VI.3. Résultantes des forces de pression uniforme sur une surface fermée

On se place par exemple dans l'atmosphère, à une échelle où on peut considérer la pression uniforme et égale à P_0 .

$$\oiint_{\Sigma} -P_0 d\vec{S} = \vec{0}$$

Si la pression est uniforme alors $\vec{\text{grad}} P = \vec{0}$. Or $\vec{\text{grad}} P = \rho \vec{g}$. Cela revient donc à considérer $\rho = 0$: la masse du volume de gaz déplacé est donc nulle et la poussée d'Archimède, qui correspond à l'opposé du poids du volume de gaz déplacé, est nulle.

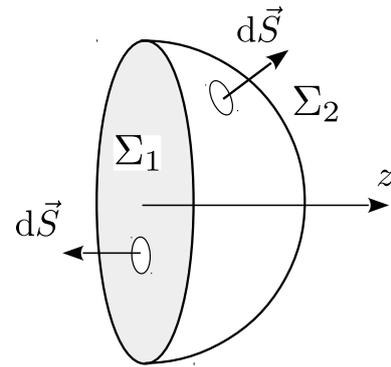
Application : utiliser cette propriété pour retrouver directement la résultante des forces s'exerçant sur un hémisphère de Magdebourg.

On considère la surface fermée $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

La force \vec{F} qu'exerce l'air extérieur sur l'hémisphère a pour expression :

$$\vec{F} = \iint_{\Sigma_2} -P_0 d\vec{S}$$

avec $d\vec{S}$ orienté vers l'extérieur.



La résultante des forces de pression uniforme sur une surface fermée étant nulle :

$$\oiint_{\Sigma} -P_0 d\vec{S} = \iint_{\Sigma_1} -P_0 d\vec{S} + \iint_{\Sigma_2} -P_0 d\vec{S} = \vec{F}_{\Sigma_1} + \vec{F} = \vec{0}$$

Or la force de pression qu'exerce l'air extérieur sur la surface plane Σ_1 vaut :

$$\vec{F}_{\Sigma_1} = \iint_{\Sigma_1} -P_0 d\vec{S} = P_0 \pi R^2 \vec{u}_z$$

d'où $\vec{F} = -\vec{F}_{\Sigma_1} = -P_0 \pi R^2 \vec{u}_z$.

On retrouve directement la valeur calculée au paragraphe précédent.

Description d'un fluide statique	
Échelle mésoscopique	Définir et connaître des ordres de grandeurs des dimensions de l'échelle mésoscopique dans le cas des liquides et des gaz.
Pression dans un fluide Forces surfaciques, forces volumiques	Citer des ordres de grandeur de la pression. Distinguer les forces de pressions des forces de pesanteur.
Champ de pression Relation de la statique des fluides	Donner l'expression de la résultante des forces pressantes s'exerçant sur un volume élémentaire de fluide. Énoncer et établir la relation de la statique des fluides dans le cas d'un fluide soumis uniquement à la pesanteur. Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas d'un fluide incompressible et pour l'atmosphère isotherme dans le cadre du modèle du gaz parfait.