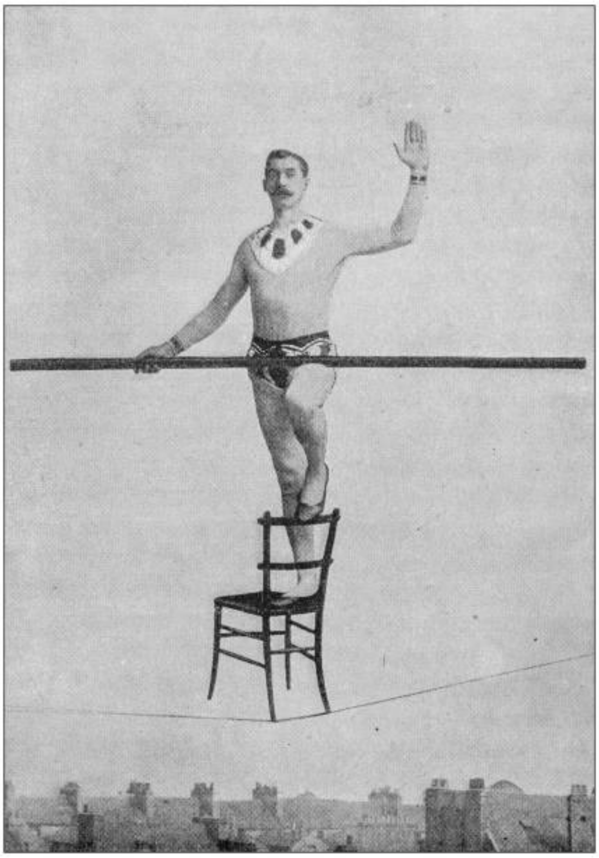
M4 - Équilibre d'un point matériel

Table des matières



I. Équilibre en référentiel galiléen

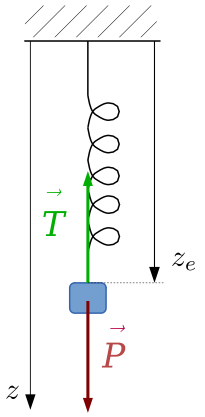
I.1. Condition d'équilibre

On considère un point matériel M à l'équilibre dans un référentiel galiliéen. On note $\vec{F} = \sum_i \vec{f_i}$ la résultante des forces qui s'exercent sur M. Le point M étant fixe dans $\mathcal{R}$, sa vitesse est nulle et donc son accélération est nulle : $\vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{a} = \vec{0}$. Le principe fondamental de la dynamique donne

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{f_i} = \vec{0}.$$

Si un point matériel est à l'équilibre dans un référentiel galiléen alors la somme des forces qui s'exercent sur lui est nulle.

$$\sum_i \vec{f_i} = \vec{0}$$



Exemple : masse m accrochée à un ressort

À l'équilibre la tension du ressort compense exactement le poids.

$$\vec{T} + \vec{P} = \vec{0}$$

En déduire z_e la longueur à l'équilibre du ressort en fonction de ℓ_0 la longueur à vide du ressort, k sa constante de raideur, g l'accélération de la pesanteur et m.

Système : masse m

Référentiel : terrestre galiléen

Bilan des forces :

- poids $m\vec{g} = mg\vec{u}_z$
- tension du ressort $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_z = -k(z - \ell_0)\vec{u}_z$ car ici $\ell = z$.

À l'équilibre $z = z_e$ tel que $m\vec{g} + \vec{T} = \vec{0}$.

On projette sur $\vec{u}_z$: $mg - k(z_e - \ell_0) = 0$.

$$\boxed{z_e = \ell_0 + \frac{mg}{k}}$$

– on vérifie l'homogénéité de la relation

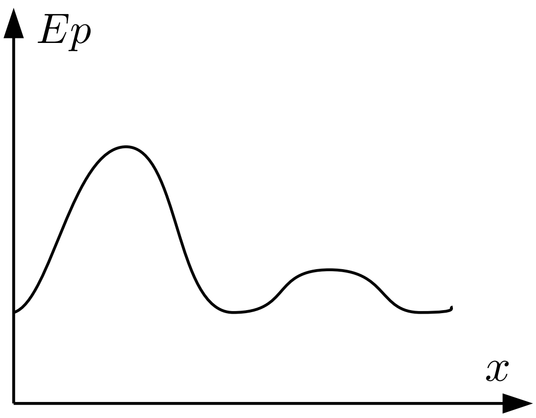
– on vérifie que $z_e > \ell_0$

I.2. Quelques constatations

On ne considère pour l'instant que des systèmes à 1 degré de liberté soumis à des forces conservatives de pesanteur ou élastique.

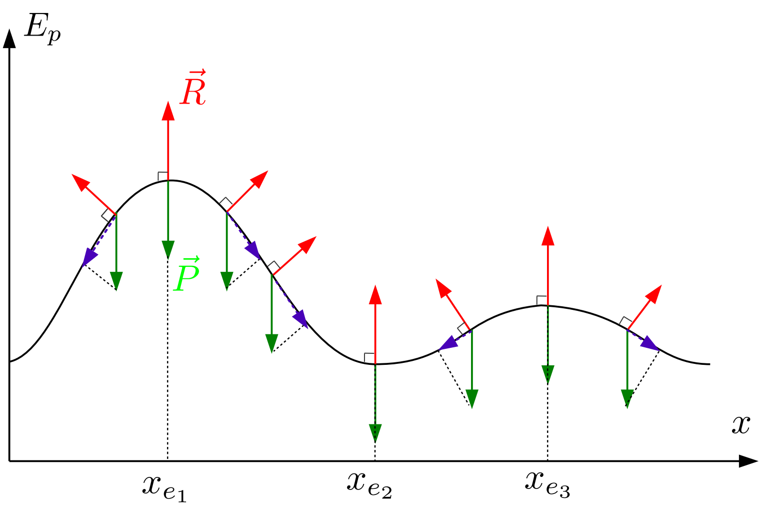
Pour des raisons de simplicité on raisonne sur l'énergie potentielle de pesanteur. Considérons l'exemple des montagnes russes.

Le profil d'énergie potentielle correspond au profil du rail.



Au cours du mouvement, la masse m est soumise à son poids et à la réaction du rail. En l'absence de frottements, cette réaction est normale au rail. Le travail de cette force est donc nul.

Sur la figure ci-dessous on a représenté en différents points, le poids et la réaction du rail (seule sa direction nous importe ici).



Il existe trois positions d'équilibre (x_{e_1}, x_{e_2} et x_{e_3}) pour lesquelles la condition $\vec{R}+\vec{P}=\vec{0}$ se réalise.
Ces points correspondent à des extrema de la courbe de $E_p(x)$. En ces points, la courbe admet une tangente horizontale.
Si on dépose sans vitesse la masse m dans l'une de ces positions, elle devrait y demeurer, en l'absence de perturbation.

Retenir :

Les positions d'équilibre correspondent à des extrema de l'énergie potentielle, pour lesquels $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}=0$.

I.3. Stabilité d'un équilibre

Un équilibre est **stable** si lorsqu'on écarte M se sa position d'équilibre, son mouvement ultérieur reste borné au voisinage de l'équilibre.

Un équilibre est **instable** si lorsqu'on écarte M se sa position d'équilibre, son mouvement ultérieur tend à l'éloigner de sa position d'équilibre.

Reprenons l'exemple précédent. Supposons qu'une perturbation écarte légèrement la masse m de sa position d'équilibre. La projection du poids sur la direction du rail permet d'analyser la stabilité le mouvement ultérieur.

Que se passe-t-il si on écarte légèrement la masse de la position d'équilibre x_{e_2} ?

La projection du poids sur la direction du rail (flèche bleue) tend à ramener la masse vers la position $x = x_{e_2}$.

Que se passe-t-il si on écarte légèrement la masse de la position d'équilibre x_{e_1} ou x_{e_3} ?

La projection du poids sur la direction du rail (flèche bleue) tend à éloigner davantage la masse de sa position $x = x_{e_1}$ (ou $x = x_{e_3}$) .

Identifier les positions d'équilibre stable(s) et instable(s).

– $x = x_{e_2}$ correspond à une position d'équilibre stable

– $x = x_{e_1}$ et $x = x_{e_3}$ correspondent à des positions d'équilibre instables

Retenir :

Les positions d'équilibre **stables** correspondent à un **minimum** de l'énergie potentielle.

Les positions d'équilibre **instables** correspondent à un **maximum** de l'énergie potentielle.

I.4. Expression mathématique de la condition d'équilibre et de sa stabilité

On considère un mouvement à 1 dimension, faisant intervenir des forces conservatives associées à l'énergie potentielle E_p.

On note x la variable d'espace (on pourrait raisonner de même avec z ou θ).

Condition d'équilibre :

$$\boxed{\text{À l'équilibre : } \left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_e} = 0}$$

Stabilité de l'équilibre :

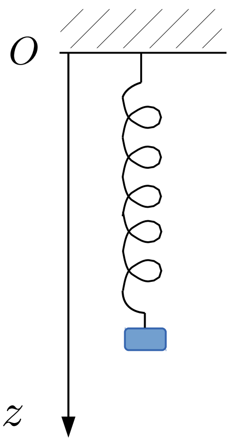
$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } \left(\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_e} > 0 \Rightarrow E_p \text{ est minimale à l'équilibre } \Rightarrow \text{ l'équilibre est stable} \\ \text{Si } \left(\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_e} < 0 \Rightarrow E_p \text{ est maximale à l'équilibre } \Rightarrow \text{ l'équilibre est instable} \end{array}}$$

Remarque : si $\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_e} = 0$ il faut revenir à l'étude graphique et vérifier si la courbe admet un minimum ou un maximum pour pouvoir conclure.

II. Exemples

II.1. Masse suspendue à un ressort ;

Reprenons l'exemple de la partie I.1. On peut retrouver la position d'équilibre z_e par une méthode énergétique.



Système : masse m

Référentiel terrestre galiléen

Bilan des forces :
– poids : associé à l'énergie potentielle E_{pp}
– force élastique : associée à l'énergie potentielle E_{pe}

$E_{pp} = -mgz + cte = -mgz$ si on choisit $E_{pp}(0) = 0$.

$E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}k(z - \ell_0)^2$ si on choisit $E_{pe} = 0$ pour $z = \ell_0$.

$E_p = E_{pp} + E_{pe} = -mgz + \frac{1}{2}k(z - \ell_0)^2$

La variable d'espace choisie est z.

À l'équilibre $z = z_e$ tel que $\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z}\right)_{z=z_e} = 0$.

$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z} = -mg + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}k(z - \ell_0)$

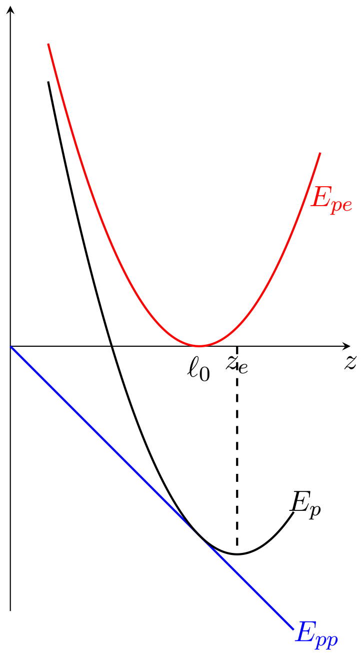
z_e vérifie la relation : $-mg + k(z_e - \ell_0) = 0$

$$\boxed{z_e = \ell_0 + \frac{mg}{k}}$$

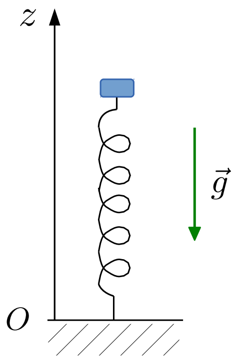
On vérifie que $z_e > \ell_0$: le ressort est bien allongé.

On a tracé sur le diagramme ci-contre, l'énergie potentielle de pesanteur, l'énergie potentielle élastique E_{pe} et E_p, l'énergie potentielle totale.

z_e correspond à la position du minimum de E_p : l'équilibre est stable.
On vérifie graphiquement que la position d'équilibre z_e est supérieure à ℓ_0.



II.2. Amortisseur de voiture



Système : masse m

Référentiel : terrestre galiléen

Bilan des forces :
– poids : force conservative associée à l'énergie potentielle E_{pp}
– force élastique : force conservative associée à l'énergie potentielle E_{pe}

$E_{pp} = mgz + cte = mgz$ si on choisit $E_{pp}(0) = 0$.

$E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}k(z - \ell_0)^2$ si on choisit $E_{pe} = 0$ pour $z = \ell_0$.

$E_p = E_{pp} + E_{pe} = mgz + \frac{1}{2}k(z - \ell_0)^2$

La variable d'espace choisie est z : $E_p = E_p(z)$.

À l'équilibre $z = z_e$ tel que $\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z}\right)_{z=z_e} = 0$.

$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z} = mg + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}k(z - \ell_0)$

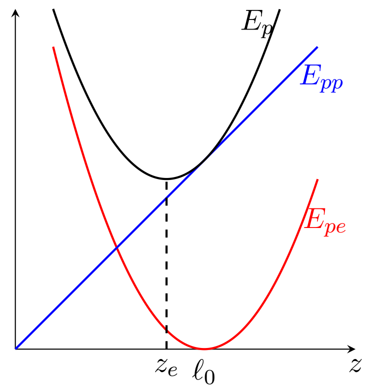
z_e vérifie l'équation : $mg + k(z_e - \ell_0) = 0$

$$\boxed{z_e = \ell_0 - \frac{mg}{k}}$$

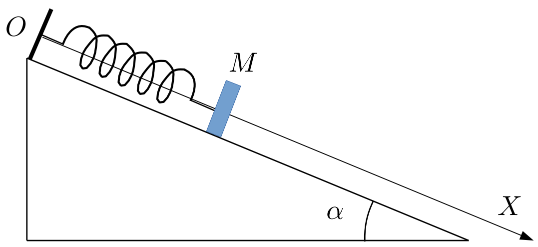
On vérifie que $z_e < \ell_0$: le ressort est bien comprimé.

On a tracé sur le diagramme ci-contre, l'énergie potentielle de pesanteur, l'énergie potentielle élastique E_{pe} et E_p, l'énergie potentielle totale.

z_e correspond à la position du minimum de E_p : l'équilibre est stable.
On vérifie graphiquement que la position d'équilibre z_e est inférieure à ℓ_0.



• ressort sur un plan incliné



Système : masse m

Référentiel : terrestre galiléen

Bilan des forces :
– poids : associé à l'énergie potentielle E_{pp}
– force élastique : associée à l'énergie potentielle E_{pe}
– réaction normale du support : ne travaille pas (on néglige les frottements)

$E_{pp} = -mgX\sin\alpha + cte = -mgX\sin\alpha$
si on choisit $E_{pp}(0) = 0$ en O.

$E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}k(X - \ell_0)^2$
si on choisit $E_{pe}(0) = 0$ pour $X = \ell_0$.

$E_p = E_{pp} + E_{pe} = -mgX\sin\alpha + \frac{1}{2}k(X - \ell_0)^2$

La variable d'espace choisie est X.
À l'équilibre $X = X_e$ tel que $\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}X}\right)_{X=X_e} = 0$.

$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}X} = -mg\sin\alpha + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}k(X - \ell_0)$

X_e vérifie donc la relation : $-mg\sin\alpha + k(X_e - \ell_0) = 0$

$$\boxed{X_e = \ell_0 + \frac{mg\sin\alpha}{k}}$$

On vérifie que le ressort est bien allongé ($X_e > \ell_0$) et lorsque $\alpha = 0$ on retrouve $X_e = \ell_0$: à l'horizontale le ressort a sa longueur à vide.

Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ on retrouve $X_e = \ell_0 + \frac{mg}{k}$ en accord avec la valeur trouvée pour la position d'équilibre d'une masse suspendue à un ressort.

4. Équilibre et stabilité d'un point matériel	
Équilibre d'un point matériel. Stabilité	Démontrer et exploiter la condition d'équilibre d'un point matériel dans un référentiel galiléen. Analyser qualitativement la stabilité d'une position d'équilibre en considérant un petit déplacement au voisinage de celle-ci.
Équilibre dans un champ de force conservatif	À partir d'un graphe ou d'une expression analytique de l'énergie potentielle déterminer les éventuelles positions d'équilibre d'un point matériel et leur stabilité dans un mouvement à un degré de liberté.