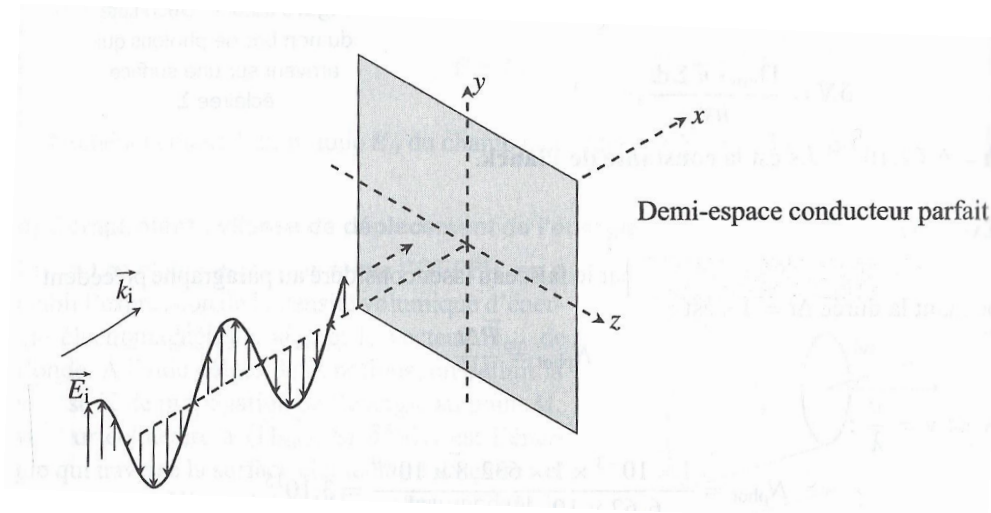


EM 8 b - Réflexion sous incidence normale d'une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement sur un plan conducteur parfait

Introduction :

On s'est intéressé jusqu'à présent à la propagation d'ondes électromagnétiques progressives en milieu illimité. On envisage dans ce chapitre de restreindre le domaine de propagation des ondes. Pour commencer, on limite le milieu de propagation par un plan conducteur parfait et on étudie l'onde réfléchie. On peut ensuite limiter davantage le milieu de propagation et créer des cavités. On constate alors, qu'en milieu limité, seules certaines fréquences peuvent exister. Elles correspondent aux modes propres de la cavité. Ces cavités sont utilisées dans les lasers. Un four micro-ondes est également une cavité électromagnétique¹.

On s'intéresse tout d'abord la réflexion d'une OEMP sur un plan conducteur parfait. Le milieu de propagation de l'onde correspond au demi-espace $x < 0$ et le milieu conducteur parfait occupe le demi espace $x \geq 0$.



Avant de faire le calcul de l'onde réfléchie, il est nécessaire de définir un milieu conducteur parfait et de rappeler les relations de passage du champ électromagnétique.

I. Quelques rappels

I.1. Modèle du conducteur parfait

On a étudié la conduction électrique dans le chapitre EM3 du cours. On y a défini γ (parfois notée σ), la **conductivité électrique** d'un matériau par la relation reliant \vec{j} , le vecteur densité volumique de courant, au champ électrique \vec{E} :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

qui constitue la loi d'Ohm locale. Unités : $[\gamma] = \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$

On a également établi qu'un tronçon de conducteur de section S et de longueur L présentait une résistance :

$$R = \frac{\rho L}{S} = \frac{L}{\gamma S}$$

avec $\rho = 1/\gamma$ la résistivité du matériau (qui se mesure en $\Omega \cdot \text{m}$).

1. voir l'article "Vitesse de la lumière et four micro-ondes" de Jean-Michel COURTY et Édouard KIERLIK, paru dans le magazine Pour la science, Juin 2011

Un tronçon **conducteur parfait** présente une résistance nulle. Sa résistivité est donc nulle, et sa **conductivité infinie**.

$$\rho = 0 \quad \text{et} \quad \gamma \rightarrow \infty$$

La puissance volumique dissipée par effet Joule dans le conducteur vaut

$$\mathcal{P} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2$$

Pour un conducteur parfait $\gamma \rightarrow \infty$. La puissance volumique dissipée n'étant pas infinie on en déduit $E^2 \rightarrow 0$: **le champ électrique \vec{E} est nul à l'intérieur d'un conducteur parfait.**

La relation de Maxwell-Faraday donne, avec $\vec{E} = \vec{0}$:

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Seul un champ magnétique stationnaire pourrait exister dans un conducteur parfait. On ne souhaite prendre en compte que des champs magnétiques variables. On considérera donc $\vec{B} = \vec{0}$ au sein du conducteur parfait.

La relation de Maxwell-Gauss donne, avec $\vec{E} = \vec{0}$:

$$\text{div} \vec{E} = 0 = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad \text{soit} \quad \rho = 0$$

La densité volumique de charge est nulle dans un conducteur parfait : les charges ne sont localisées qu'à la surface du conducteur.

La relation de Maxwell-Ampère donne, avec $\vec{E} = \vec{0}$ et $\vec{B} = \vec{0}$:

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \underbrace{\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{=\vec{0}} \right) \quad \text{soit} \quad \vec{j} = \vec{0}$$

Le vecteur densité volumique de courant est nul dans un conducteur parfait : les courants ne peuvent être localisés qu'à la surface du conducteur.

Retenir :

À l'intérieur d'un **conducteur parfait** ($\gamma \rightarrow \infty$) :

$$\vec{E} = \vec{0} \quad \vec{B} = \vec{0} \quad \vec{j} = \vec{0} \quad \rho = 0$$

Le champ électromagnétique est nul. Les charges et les courants ne peuvent être que surfaciques.

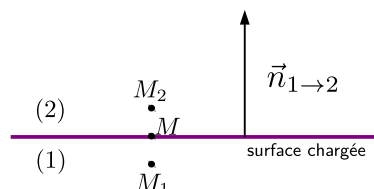
I.2. Relations de passage

On a admis, après les avoir constatées sur plusieurs exemples, les relations de passage pour le champ électrique et pour le champ magnétique.

a) Relation de passage pour le champ électrique

On considère une surface comportant une densité surfacique de charge σ . Soit \vec{E}_1 le champ électrique en un point M_1 infiniment proche du point M de la surface, côté 1, et \vec{E}_2 le champ électrique en un point M_2 infiniment proche de M mais du côté 2. On a

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

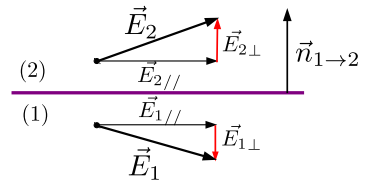


Conséquence :

La composante tangentielle du champ électrique est continue.

Seule la composante de \vec{E} normale au plan est discontinue.

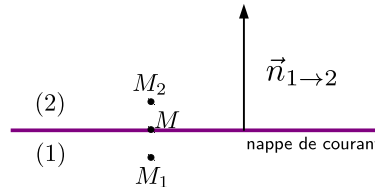
$$\begin{cases} \vec{E}_{2\perp} - \vec{E}_{1\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1\rightarrow 2} \\ \vec{E}_{2//} - \vec{E}_{1//} = \vec{0} \end{cases}$$



b) Relation de passage pour le champ magnétique

On considère une surface présentant une densité surfacique de courant \vec{j}_s . Soit \vec{B}_1 le champ magnétique en un point M_1 infiniment proche du point M de la surface, côté 1, et \vec{B}_2 le champ magnétique en un point M_2 infiniment proche de M mais du côté 2. On a

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1\rightarrow 2}$$



Conséquence :

La composante normale du champ magnétique est continue. Seule la composante de \vec{B} tangentielle au plan est discontinue.

$$\begin{cases} \vec{B}_{2\perp} - \vec{B}_{1\perp} = \vec{0} \\ \vec{B}_{2//} - \vec{B}_{1//} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1\rightarrow 2} \end{cases}$$

c) Conséquence sur la direction des champs \vec{E} et \vec{B} à la surface d'un conducteur parfait

On considère l'interface air (1) - conducteur (2). Le champ électrique est nul dans un métal conducteur parfait $\vec{E}_2 = \vec{0}$. La composante tangentielle du champ électrique étant continue à l'interface air-conducteur :

$$\underbrace{\vec{E}_{2//} - \vec{E}_{1//}}_{=\vec{0}} = \vec{0}$$

$$\vec{E}_{1//} = \vec{0}$$

La composante tangentielle du champ électrique est nulle à la surface d'un conducteur parfait : $\vec{E}_{//} = \vec{0}$.

On se place toujours l'interface air (1) - conducteur (2). Le champ magnétique est nul dans un conducteur parfait $\vec{B}_2 = \vec{0}$. La composante perpendiculaire du champ magnétique étant continue à l'interface air-métal :

$$\underbrace{\vec{B}_{2\perp} - \vec{B}_{1\perp}}_{=\vec{0}} = \vec{0}$$

$$\vec{B}_{1\perp} = \vec{0}$$

La composante normale du champ magnétique est nulle à la surface d'un conducteur parfait : $\vec{B}_{\perp} = \vec{0}$.

I.3. Épaisseur de peau

Dans la vraie vie, seuls les matériaux supraconducteurs ont une résistivité nulle. On se contente donc d'utiliser de bons conducteurs tels que les métaux. On peut montrer, à partir des équations de Maxwell et de la loi d'Ohm locale, qu'une onde électromagnétique de pulsation ω ne pénètre pas dans un métal conducteur au delà

de quelques δ , avec δ une longueur caractéristique appelée **épaisseur de peau**. Cette longueur dépend de la pulsation de l'onde et de la résistivité du matériau. Elle a pour expression :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

- Plus la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ est élevée plus l'épaisseur de peau est réduite.
- Plus la conductivité est élevée, plus l'épaisseur de peau est réduite.

Pour un conducteur parfait $\gamma \rightarrow \infty$ et donc $\delta \rightarrow 0$. L'épaisseur de peau est nulle. Le champ électromagnétique ne pénètre pas dans le métal.

Application :

Une des fréquences utilisées pour la 4G est de 2,6 GHz. La conductivité de l'aluminium est $\gamma_{Al} = 37,7 \cdot 10^6 \text{ S.m}^{-1}$. L'épaisseur typique d'une feuille d'aluminium est de l'ordre de 0,02 mm.

Est-il utile d'envelopper le téléphone portable d'un élève dans du papier aluminium afin de ne plus être importuné par les sonneries ? Sinon, il reste toujours la possibilité de refaire l'expérience de Galilée...

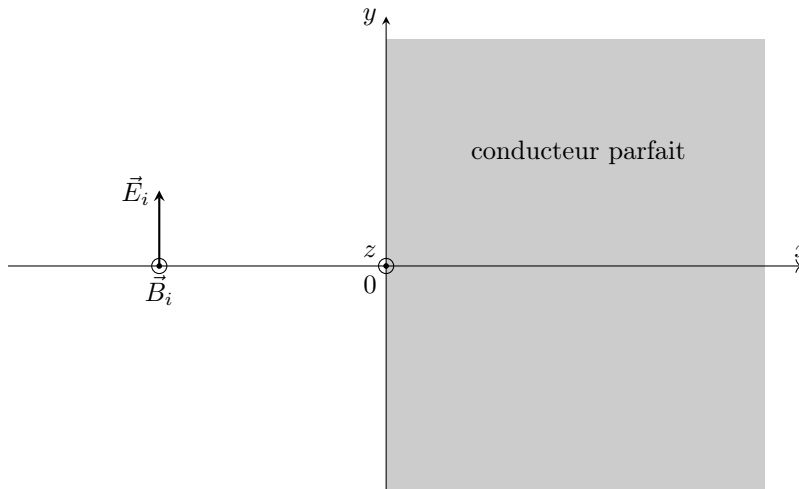
$$\delta = \sqrt{\frac{2}{4\pi \cdot 10^{-7} \times 37,7 \cdot 10^6 \times 2\pi \times 2,6 \cdot 10^9}} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^4} \sqrt{\frac{1}{37,7 \times 2,6}} \simeq 2 \mu\text{m}$$

L'épaisseur de peau est environ dix fois plus faible que l'épaisseur de la feuille d'aluminium. Le procédé devrait donc être efficace.

Remarque :

Il existe une analogie entre l'épaisseur de peau décrite précédemment et la longueur caractéristique de pénétration des "ondes thermiques" établies au paragraphe IV du chapitre Th9 sur la diffusion thermique.

II. Détermination de l'onde réfléchi



On exprime le champ électrique de l'onde incidente qui se propage dans le sens des x croissants et polarisée suivant \vec{u}_y :

$$\vec{E}_i = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_y$$

On en déduit l'expression du champ magnétique incident

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}_i}{c} = \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_z$$

Or, le champ électrique dans le métal est nul et la composante tangentielle de \vec{E} doit être continue en $x = 0$. On en a déduit, le champ électrique étant nul dans le conducteur parfait, que la composante tangentielle du champ électrique doit, quel que soit t , s'annuler en $x = 0$.

Si seul le champ incident est présent on a en $x = 0$:

$$\vec{E}_i(0, t) = E_0 e^{j(\omega t)} \vec{u}_y$$

La composante tangentielle du champ électrique (ici suivant \vec{u}_y) ne s'annule donc pas quel que soit t . La relation de passage pour le champ électrique n'est donc pas vérifiée.

On va alors superposer à l'onde plane progressive incidente une onde réfléchie en faisant les hypothèses suivantes :

- l'onde réfléchie se propage dans la direction de $-\vec{u}_x$, conformément à la loi de Descartes de la réflexion
- l'onde réfléchie a même pulsation ω que l'onde incidente.
- l'onde réfléchie est polarisée suivant \vec{u}_y , sinon la continuité de la composante tangentielle de \vec{E} en $x = 0$ ne pourrait pas être assurée.

Ainsi, pour $x < 0$ se superposent les deux OEMPPHPR suivantes :

$$\vec{E}_i \begin{vmatrix} 0 \\ E_0 e^{j(\omega t - kx)} \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{E}_r \begin{vmatrix} 0 \\ E_r e^{j(\omega t + kx)} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{Le champ résultant } \vec{E} \text{ a pour composantes : } \vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = \begin{vmatrix} 0 \\ E_0 e^{j(\omega t - kx)} + E_r e^{j(\omega t + kx)} \\ 0 \end{vmatrix}$$

La continuité de la composante tangentielle de \vec{E} en $x = 0$ entraîne :

$$\forall t \quad E_0 e^{j\omega t} + E_r e^{j\omega t} = 0$$

$$\forall t \quad (E_0 + E_r) e^{j\omega t} = 0$$

$$\text{On en déduit } E_r = -E_0, \quad \text{d'où} \quad \vec{E}_r \begin{vmatrix} 0 \\ -E_0 e^{j(\omega t + kx)} \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{soit} \quad \vec{E}_r = -E_0 e^{j(\omega t + kx)} \vec{u}_y$$

On calcule ensuite le champ magnétique associé à l'onde réfléchie :

$$\vec{B}_r = \frac{-\vec{u}_x \wedge \vec{E}_r}{c} = \frac{-\vec{u}_x \wedge (-E_0 e^{j(\omega t + kx)}) \vec{u}_y}{c} = \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t + kx)} \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y$$

$$\vec{B}_r = \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t + kx)} \vec{u}_z$$

Remarque :

\vec{B}_i et \vec{B}_r sont tous deux tangents au plan conducteur : leur composante normale est nulle. La conservation de la composante normale de $\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r$ en $x = 0$ est donc bien vérifiée.

III. Structure de l'onde réfléchie

III.1. Expression des champs résultants

On a calculé :

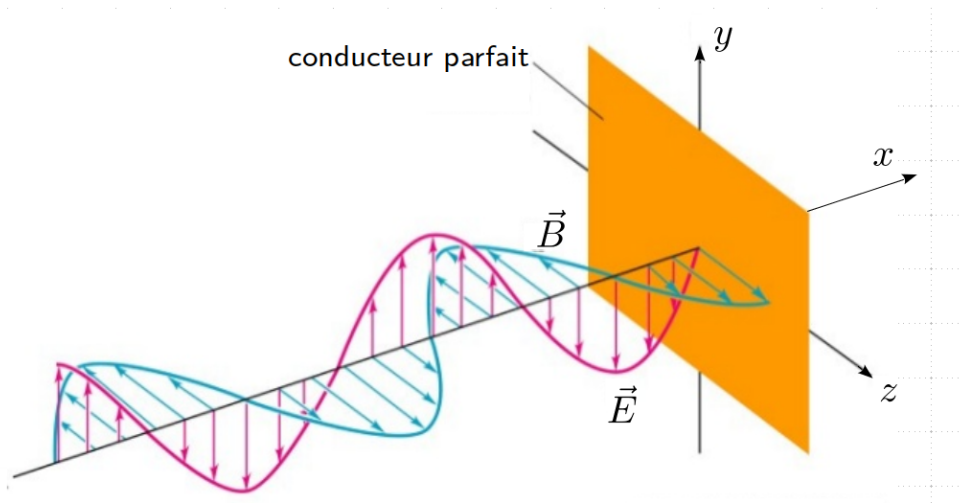
$$\begin{cases} \vec{E}_i = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_y \\ \vec{B}_i = \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{E}_r = -E_0 e^{j(\omega t + kx)} \vec{u}_y \\ \vec{B}_r = \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t + kx)} \vec{u}_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_0 (e^{j(\omega t - kx)} - e^{j(\omega t + kx)}) \vec{u}_y = E_0 e^{j\omega t} (e^{-jkx} - e^{jkx}) \vec{u}_y \\ \vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = \frac{E_0}{c} (e^{j\omega t - kx} + e^{j\omega t + kx}) \vec{u}_z = \frac{E_0}{c} e^{j\omega t} (e^{-jkx} + e^{jkx}) \vec{u}_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{E} = E_0 e^{j\omega t} (-2j \sin kx) \vec{u}_y \\ \vec{B} = \frac{E_0}{c} e^{j\omega t} (2 \cos kx) \vec{u}_z \end{cases}$$

On prend les parties réelles avec $\text{Re}(-j e^{j\omega t}) = \text{Re}(-j(\cos \omega t + j \sin \omega t)) = \text{Re}(-j \cos \omega t + \sin \omega t) = \sin \omega t$.
Autre méthode : en remarquant que $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$ on a $\text{Re}(-j e^{j\omega t}) = \text{Re}(e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}) = \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \sin \omega t$.

$$\begin{cases} \vec{E} = 2E_0 \sin kx \sin \omega t \vec{u}_y \\ \vec{B} = \frac{2E_0}{c} \cos kx \cos \omega t \vec{u}_z \end{cases}$$



III.2. Description du champ résultant : onde stationnaire

a) Observation

L'onde résultante obtenue n'est plus une onde progressive puisqu'elle ne s'exprime plus en fonction de $x - ct$ (ou de $\omega t - kx$) mais en fonction d'un produit d'une fonction de t et d'une fonction de x .

On peut visualiser l'onde électromagnétique stationnaire sur le site

<http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/electri/oemstat.html>

Pour visualiser la superposition de deux ondes progressives harmoniques se propageant dans des directions opposées :

<http://nbviewer.jupyter.org/url/pcsi1.physique.pagesperso-orange.fr/sagemath/OP3.ipynb>

On n'observe plus de propagation. L'amplitude de vibration dépend du point où on se place.

b) Nœuds et ventres

Rappels :

- Un **nœud** est un point où, quel que soit t , le champ considéré est nul.
- Un **ventre** est un point où, quel que soit t , le champ considéré oscille avec une amplitude maximale.

Les **nœuds du champ électrique** correspondent aux valeurs x_n de x telles que $\sin kx_n = 0$ qui vérifient donc :

$$kx_n = n\pi \text{ avec } n \in \mathbb{Z} \text{ et } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} x_n = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x_n = n \frac{\lambda}{2} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Deux nœuds consécutifs sont distants de $x_{n+1} - x_n = (n+1) \frac{\lambda}{2} - n \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}$

Le plan du conducteur constitue un plan nodal pour le champ électrique.

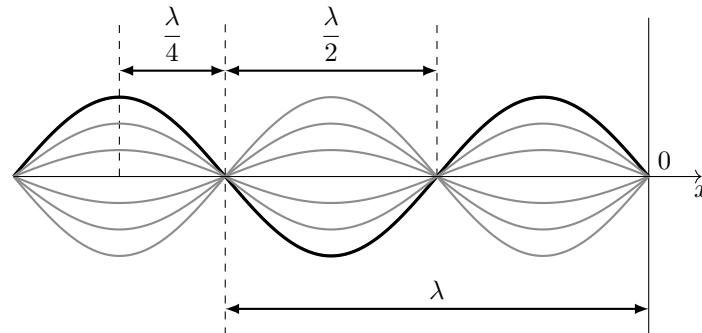
Les **ventres du champ électrique** correspondent aux valeurs x'_n de x telles que $\cos kx'_n = \pm 1$ qui vérifient donc :

$$kx'_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ avec } n \in \mathbb{Z} \text{ et } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} x'_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x'_n = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Deux nœuds (ou deux ventres) consécutifs sont distants $\frac{\lambda}{2}$; un nœud et un ventre successifs sont distants de $\frac{\lambda}{4}$.



Nœuds et ventre du champ électrique \vec{E}

Les **nœuds du champ magnétique** correspondent aux valeurs de x telles que $\cos kx = 0$ c'est-à-dire au ventre du champ électrique.

Les **ventres** du champ magnétique correspondent aux valeurs de x telles que $\cos kx = \pm 1$ c'est-à-dire aux nœuds du champ électrique.

III.3. Aspect énergétique de l'onde stationnaire

On peut calculer le vecteur de Poynting associé à l'onde stationnaire :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c} \sin kx \cos kx \sin \omega t \cos \omega t \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z$$

$$\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin 2kx \sin 2\omega t \vec{u}_x$$

Le vecteur de Poynting s'annule, quel que soit t , lorsque $\vec{E} = \vec{0}$ ou $\vec{B} = \vec{0}$, c'est à dire au niveau des nœuds de vibration du champ électrique et du champ magnétique.

On peut calculer la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting en tout point :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$$

En moyenne, il n'a pas de propagation de l'énergie pour une onde stationnaire.

III.4. Relation de passage du champ magnétique et densité surfacique de courant

Exprimons la relation de passage pour le champ magnétique à l'interface air (1) - conducteur parfait (2) :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

avec $\vec{B}_2 = \vec{0}$, $\vec{B}_1 = \vec{B}(0, t) = \frac{2E_0}{c} \cos(0) \cos \omega t \vec{u}_z = \frac{2E_0}{c} \cos \omega t \vec{u}_z$ et $\vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{u}_x$. D'où

$$-\frac{2E_0}{c} \cos \omega t \vec{u}_z = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_x$$

On en déduit

$$\vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos \omega t \vec{u}_y$$

La réflexion sous incidence normale d'une OEMPPH polarisée rectilignement suivant \vec{u}_y crée à la surface du conducteur des courants surfaciques dans la même direction \vec{u}_y et de même pulsation ω . Ce sont ces courants qui sont à l'origine du champ réfléchi (pour $x < 0$) et d'un champ transmis dans le métal (pour $x > 0$). Ce dernier champ est tel qu'il s'oppose en tout point et à tout instant au champ incident : d'où l'annulation de \vec{E} à l'intérieur du métal.

Remarque :

Exprimons également la relation de passage pour le champ électrique

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

avec $\vec{E}_2 = \vec{0}$, $\vec{E}_1 = \vec{E}(0, t) = \vec{0}$ et $\vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{u}_x$. On en déduit

$$\sigma = 0$$

La densité surfacique de charge est nulle.

IV. Cavité résonnante

IV.1. Présentation

On considère une cavité située entre les plans $x = 0$ et $x = L$. L'espace $x < 0$ et $x > L$ est occupé par un conducteur parfait.



On cherche quels types d'ondes peuvent exister entre ces deux plans.

Elles doivent être telles que la composante tangentielle de \vec{E} doit s'annuler en $x = 0$ et $x = L$. Si on cherche des ondes polarisées dans une direction \vec{u}_p perpendiculaire à \vec{u}_x et donc tangente aux plans, le champ \vec{E} doit s'annuler en $x = 0$ et $x = L$.

Voyez-vous une analogie entre ce problème et une autre situation déjà rencontrée dans l'année ?

IV.2. Détermination des modes propres partir de la résolution directe de l'équation d'onde

Les plans étant infinis, on cherche des solutions pour \vec{E} indépendante de y et z : $\vec{E}(x, t)$.

On cherche une solution de l'équation de d'Alembert sous forme d'une onde stationnaire, polarisée perpendiculairement à \vec{u}_x . On note \vec{u}_y sa direction de polarisation. L'onde étant stationnaire elle s'exprime comme un produit d'une fonction de x et d'une fonction de t .

$$\vec{E}(x, t) = f(x)g(t)\vec{u}_y$$

On peut vérifier que cette expression vérifie l'équation de Maxwell-Gauss dans le vide :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial y} (f(x)g(t)) = 0$$

On doit tenir compte des conditions aux limites $\begin{cases} \forall t \ E_y(0, t) = f(0)g(t) = 0 & \text{d'où } f(0) = 0 \\ \forall t \ E_y(L, t) = f(L)g(t) = 0 & \text{d'où } f(L) = 0 \end{cases}$

On injecte l'expression de \vec{E} dans l'équation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

avec

$$- \Delta \vec{E} = \Delta (f(x)g(t)) \vec{u}_y = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f(x)g(t) \vec{u}_y = f''(x)g(t) \vec{u}_y$$

$$- \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = f(x)g''(t) \vec{u}_y$$

d'où

$$f''(x)g(t) = \frac{1}{c^2} f(x)g''(t)$$

On sépare les variables x et t :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{g''(t)}{g(t)}$$

Le membre de gauche ne dépend que de x et celui de droite que de t . Ils sont donc nécessairement constants. Si on dérive le membre de gauche par rapport à x on trouve 0 car $g''(t)/g(t)$ est indépendant de x . Même raisonnement si on dérive le membre de droite par rapport à t . On note A cette constante.

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{g''(t)}{g(t)} = A$$

A est homogène à l'inverse d'une longueur au carré $[A] = \text{m}^{-2}$.

On en déduit les deux équations différentielles vérifiées par $f(x)$ et $g(t)$:

$$\begin{cases} f''(x) - Af(x) = 0 & (1) \\ g''(t) - Ac^2g(t) = 0 & (2) \end{cases}$$

On s'intéresse à la solution de (1) qui admet comme équation caractéristique : $r^2 - A = 0$.

- si $A > 0$: l'équation caractéristique admet pour racines $r = \pm\sqrt{A}$

$$f(x) = \alpha e^{\sqrt{A}x} + \beta e^{-\sqrt{A}x}$$

En tenant compte des conditions aux limites $f(0) = f(L) = 0$:

$$\begin{cases} f(0) = \alpha + \beta = 0 \\ f(L) = \alpha e^{\sqrt{A}L} + \beta e^{-\sqrt{A}L} = 0 \end{cases}$$

ce qui implique $\alpha = \beta = 0$. La seule fonction capable de satisfaire aux conditions aux limites est la fonction identiquement nulle \Rightarrow sans intérêt.

- si $A = 0$: $f''(x) = 0$ d'où $f(x) = \alpha x + \beta$ avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} f(0) = \beta = 0 \\ f(L) = \alpha L + \beta = 0 \end{cases}$$

qui donne encore $\alpha = \beta = 0$, et donc seule la fonction identiquement nulle peut satisfaire les deux conditions aux limites \Rightarrow sans intérêt.

- si $A < 0$: l'équation caractéristique admet pour racines $r = \pm i\sqrt{-A}$

$$f(x) = \alpha \cos(\sqrt{-A}x) + \beta \sin(\sqrt{-A}x)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} f(0) = \alpha = 0 \\ f(L) = \alpha \cos(\sqrt{-A}L) + \beta \sin(\sqrt{-A}L) = 0 \end{cases}$$

d'où $\alpha = 0$ et $\beta \sin \sqrt{-A}L = 0$. Or $\beta \neq 0$ sinon on retombe sur la solution identiquement nulle et on n'en veut pas ! On a donc

$$\sin(\sqrt{-A}L) = 0$$

d'où

$$\begin{aligned} \sqrt{-A}L &= n\pi & n \in \mathbb{N}^* \\ \sqrt{-A} &= n\frac{\pi}{L} & n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Ainsi $f(x) = \beta \sin(n\frac{\pi}{L}x)$.

On a $A = -n^2\frac{\pi^2}{L^2}$ $n \in \mathbb{N}^*$. On reporte dans l'équation(2) :

$$g''(t) + n^2\frac{\pi^2}{L^2}c^2g(t) = 0$$

On reconnaît l'équation de l'oscillateur harmonique :

$$g''(t) + \omega_n^2g(t) = 0$$

avec $\omega_n = n\frac{\pi}{L}c$. D'où $g(t) = a \cos \omega_n t + b \sin \omega_n t = K \cos(\omega_n t + \varphi_n)$, K et φ étant des constantes.

L'expression générale du champ électrique, pour une valeur de n donnée est donc :

$$\vec{E}_n(x, t) = E_{0_n} \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \cos\left(n\frac{\pi}{L}ct + \varphi_n\right) \vec{u}_y$$

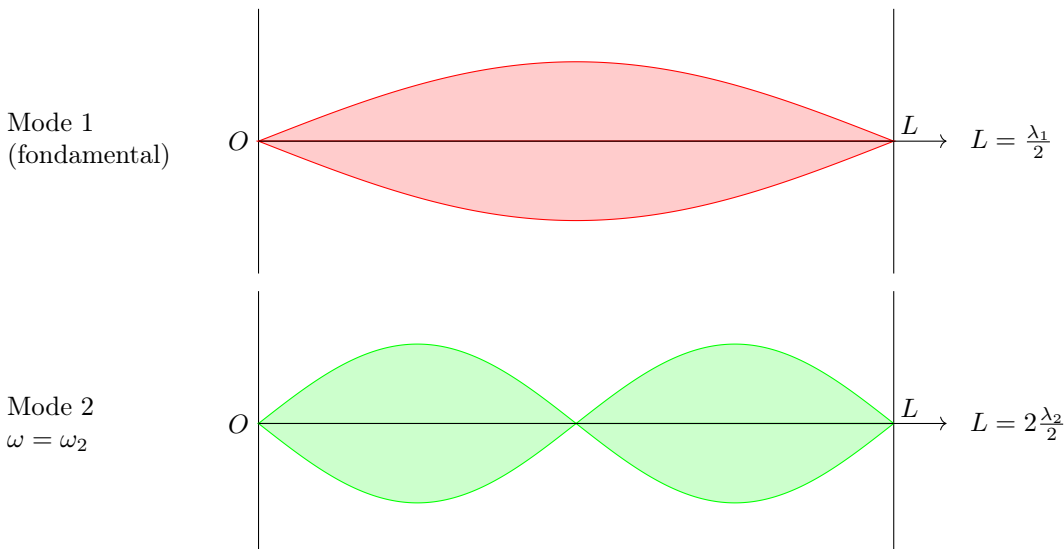
qui correspond à un mode propre de la cavité.

On obtient une onde stationnaire qui admet des nœuds de vibrations à chaque extrémités.

On peut poser :

$$k_n = n\frac{\pi}{L} \quad \text{et} \quad \omega_n = n\frac{\pi}{L}c = n\omega_1 \quad \text{avec} \quad \omega_1 = \frac{\pi}{L}c \quad \text{et} \quad \omega_n = ck_n$$

$$\vec{E}_n(x, t) = E_{0_n} \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n) \vec{u}_y$$



On peut écrire $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}$ avec λ_n la longueur d'onde d'une onde plane progressive de pulsation ω_n . On a donc

$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = n \frac{\pi}{L}$$

$$L = n \frac{\lambda_n}{2}$$

Détermination du champ \vec{B} .

Attention : l'onde stationnaire n'étant pas une onde progressive, on ne peut pas utiliser $\vec{B} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c}$. On revient donc toujours aux fondamentaux... et donc aux équations de Maxwell!

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\text{rot}} \vec{E}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_{0_n}(x, t) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial E_{0_n}(x, t)}{\partial x} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{B}_n}{\partial t} = -\frac{n\pi}{L} E_{0_n} \cos\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \cos\left(n \frac{\pi}{L} ct + \varphi_n\right) \vec{u}_z$$

$$\vec{B}_n(x, t) = -\frac{n\pi}{L} E_{0_n} \cos\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \frac{L}{n\pi c} \sin\left(n \frac{\pi}{L} ct + \varphi_n\right) \vec{u}_z$$

$$\vec{B}_n(x, t) = -\frac{E_{0_n}}{c} \cos\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \sin\left(n \frac{\pi}{L} ct + \varphi_n\right) \vec{u}_z$$

IV.3. Analogie avec la corde de Melde

Chaque plan conducteur doit correspondre aux nœuds de vibration du champ électrique.

Sachant que deux nœuds consécutifs sont distants d'une demi-longueur d'onde, on peut écrire que les seules fréquences possibles sont associées aux longueurs d'ondes telles que

$$L = n \frac{\lambda_n}{2}$$

$$L = n \frac{c}{2f_n}$$

$$f_n = n \frac{c}{2L}$$

$$\omega_n = 2\pi f_n = n \frac{\pi c}{L}$$

On retrouve bien les pulsations propres calculées précédemment.

IV.4. Généralisation

L'équation d'onde étant linéaire, la solution générale de l'équation d'onde avec conditions aux limites s'écrit, pour une direction de polarisation \vec{u}_y donnée, comme une superposition de modes propres :

$$\vec{E}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{E}_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{0_n} \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \cos\left(n \frac{\pi}{L} ct + \varphi_n\right) \vec{u}_y$$

Propagation des ondes électromagnétiques	
Réflexion sous incidence normale d'une onde plane, progressive et monochromatique polarisée rectilignement sur un plan conducteur parfait. Onde stationnaire	Exploiter la nullité des champs dans un métal parfait. Établir l'expression de l'onde réfléchie en exploitant les relations de passage fournies. Interpréter qualitativement la présence de courants localisés en surface. Reconnaître et caractériser une onde stationnaire.
Applications aux cavités à une dimension. Mode d'onde stationnaire	Mettre en œuvre un dispositif permettant d'étudier une onde électromagnétique, dans le domaine des ondes centimétriques.