

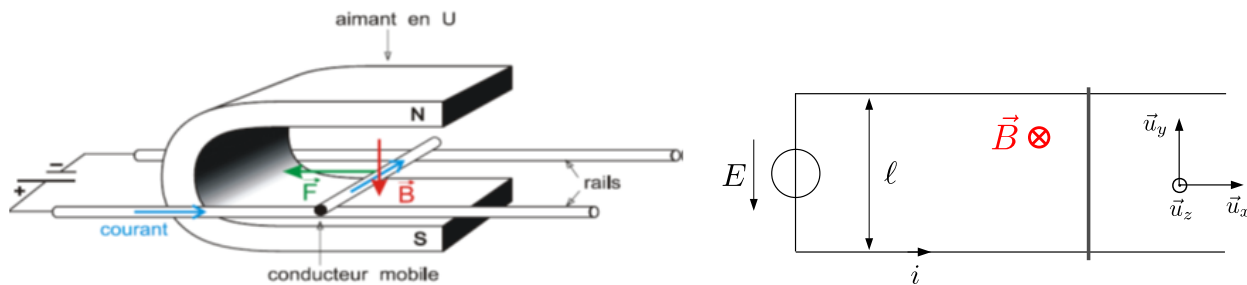
EM 7 Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

I. Rail de Laplace

I.1. Conversion électromécanique : analyse

On a déjà rencontré le dispositif des rails de Laplace : il consiste en deux rails métalliques parallèles situés dans l'entrefer d'un aimant en U. On y dépose une tige, de masse m , susceptible de se déplacer sans frottement.

Premier cas :



https://www.youtube.com/watch?v=QK_irRFTM-U

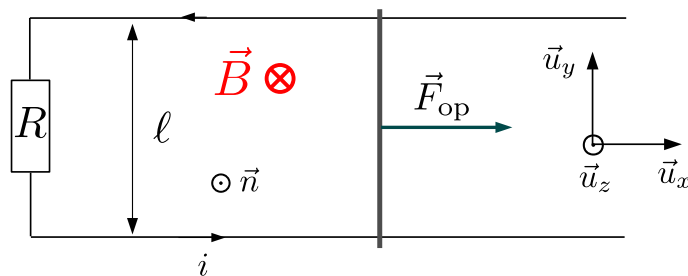
Si on relie les deux rails à un générateur, un courant circule dans le circuit, provoque une force de Laplace sur la tige et la met en mouvement (cf EM4). C'est un fonctionnement de type moteur électrique.

énergie électrique \implies énergie mécanique

Lorsque la tige se déplace, le flux du champ magnétique à travers le circuit varie. D'après la loi de Lenz il apparaît dans le circuit une fem induite qui va tendre à s'opposer à la circulation du courant dans le circuit.

Vérifier le sens de la force de Laplace.

Deuxième cas :



On ôte le générateur et on relie les deux rails par une résistance électrique. Si l'opérateur déplace la tige alors le flux du champ magnétique à travers le circuit va changer : il apparaît des courants induits qui vont provoquer une force de Laplace qui va s'opposer au mouvement de la tige donc à la force exercée par l'opérateur. La mise en mouvement de la tige permet la circulation du courant :

énergie mécanique \implies énergie électrique

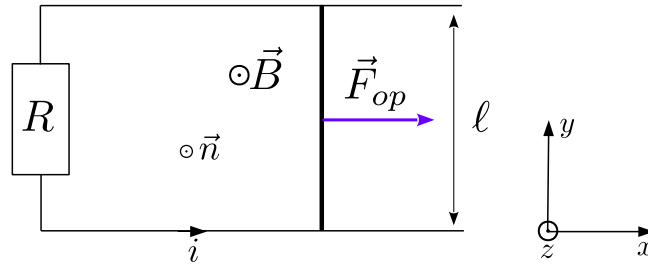
Question : prévoir le signe de i .

$i > 0$: dans ce cas la force de Laplace est de sens opposé à \vec{F}_{op} .

On constate ainsi qu'un même dispositif peut fonctionner soit en moteur électrique, soit en générateur électrique.

I.2. Mise en équation

On se place dans le cas où un opérateur exerce une force \vec{F}_{op} sur la tige, de masse m , supposée mobile sans frottements. On note R la résistance totale du circuit que l'on suppose constante. On suppose $\vec{B} = B\vec{u}_z$ uniforme.



→ **on oriente le circuit** : on choisit un sens positif pour i (et on s'y tient)
 → on en déduit l'orientation la normale \vec{n} à la surface, par la règle de la main droite (son sens détermine le signe du flux ϕ).

Remarque : avec l'orientation choisie ici pour le circuit, \vec{n} et \vec{B} sont dans le même sens.

a) Équation électrique

Le mouvement de la tige modifie le flux du champ magnétique. D'après la loi de Faraday, il apparaît une fem induite dans le circuit :

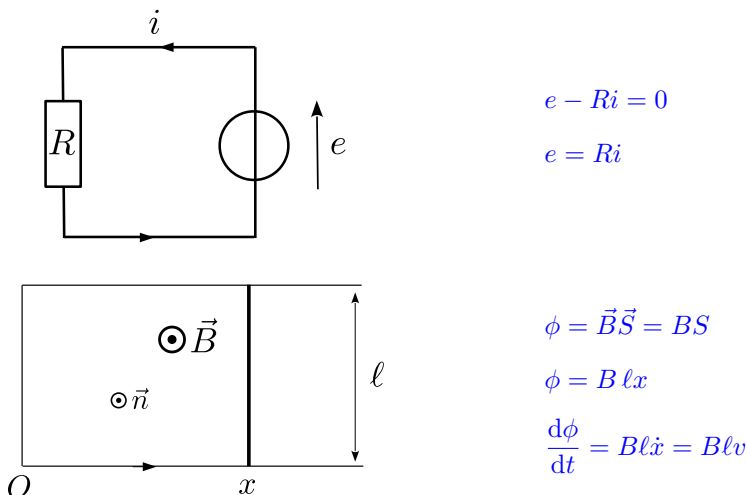
$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi^{ext}}{dt} - \frac{d\phi_p}{dt}$$

Pour des rails de Laplace, on peut négliger le champ magnétique propre devant le champ magnétique extérieur :

$$\|\vec{B}_p\| \ll \|\vec{B}\|$$

Ainsi $\phi_p \ll \phi^{ext}$: cela revient à négliger le phénomène d'auto-induction et donc à négliger l'inductance propre du circuit. Ainsi $\phi \simeq \phi^{ext}$.

On trace le schéma électrique équivalent :



$$e - Ri = 0$$

$$e = Ri$$

$$\phi = \vec{B}\vec{S} = BS$$

$$\phi = B lx$$

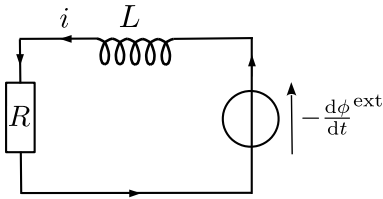
$$\frac{d\phi}{dt} = Bl\dot{x} = Blv$$

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -Blv = Ri$$

$$Ri = -Blv$$

(E.E.)

Remarque : si on tenait compte de l'inductance propre $e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi^{\text{ext}}}{dt} - \frac{d\phi_p}{dt} = -\frac{d\phi^{\text{ext}}}{dt} - L\frac{di}{dt}$. On schématiserait le circuit par :



L'équation électrique devient :

$$Ri + L\frac{di}{dt} = -\frac{d\phi^{\text{ext}}}{dt} = -Blv$$

b) Équation mécanique

Système : tige

Référentiel :terrestre galiléen

Bilan des forces :

- poids $\perp \vec{u}_x$
- réactions des rails (supposées normales : pas de frottement) $\perp \vec{u}_x$
- $\vec{F}_{\text{op}} = F_{\text{op}}\vec{u}_x$: force de traction
- \vec{F}_{Lap} : force de Laplace

$$\vec{F}_{\text{Lap}} = i \int_A^B d\vec{l} \wedge \vec{B} = i \overrightarrow{AB} \wedge \vec{B} = i\ell\vec{u}_y \wedge B\vec{u}_z = i\ell B\vec{u}_x = F_{\text{Lap}}\vec{u}_x$$

On projette le PDF sur \vec{u}_x : $m\ddot{x} = F_{\text{Lap}} + F_{\text{op}} = i\ell B + F_{\text{op}}$

$$m\frac{dv}{dt} = i\ell B + F_{\text{op}}$$

(E.M.)

c) Analyse

Les équations électriques (E.E.) et mécanique (E.M.) sont couplées : v et i apparaissent dans les deux équations. On peut les découpler pour retrouver, soit une équation en v , soit une équation en i .

• équation vérifiée par la vitesse

D'après (E.E.) : $i = -\frac{Blv}{R}$. On reporte dans (E.M.) :

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{Blv}{R}\ell B + F_{\text{op}}$$

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{\ell^2 B^2}{R}v + F_{\text{op}}$$

Ainsi $\vec{F}_{\text{Lap}} = i\ell B\vec{u}_x = -\frac{\ell^2 B^2}{R}v\vec{u}_x = -\frac{\ell^2 B^2}{R}\vec{v}$.

La force de Laplace est équivalente à une force de frottement visqueux qui tend à freiner le mouvement de la tige. Conformément à la loi de Lenz, les courants induits s'opposent, par leurs effets, à la cause qui leur a donné naissance.

Si l'opérateur exerce une force constante, la barre atteindra une vitesse limite v_∞ telle que

$$0 = -\frac{\ell^2 B^2}{R}v_\infty + F_{\text{op}}$$

$$v_\infty = \frac{RF_{\text{op}}}{\ell^2 B^2}$$

On peut calculer la durée caractéristique du régime transitoire :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\ell^2 B^2}{mR} v = \frac{F_{op}}{m}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = \frac{F_{op}}{m}$$

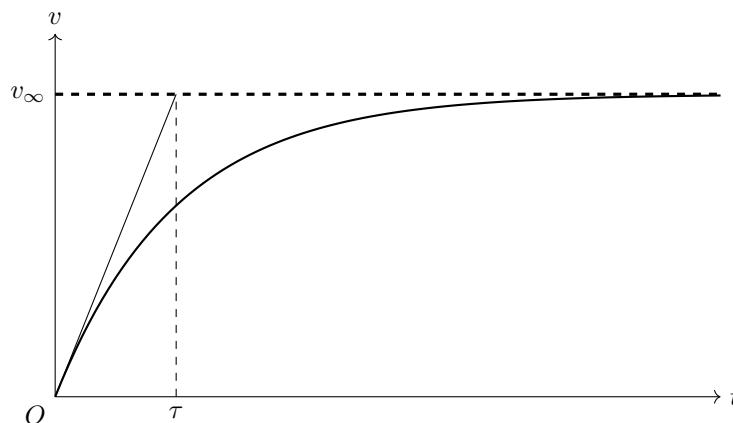
avec $\tau = \frac{mR}{\ell^2 B^2}$. Au bout de quelques τ , $v \simeq v_\infty$.

On peut aussi résoudre complètement l'équation du mouvement, en remarquant que $v = v_\infty$ correspond à la solution particulière de l'équation.

$$v(t) = v_\infty + \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\text{À } t = 0, \quad v(0) = 0 = v_\infty + \lambda.$$

$$v(t) = v_\infty(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$



• équation vérifiée par l'intensité

On dérive (E.E.) par rapport au temps, puis on utilise (E.M.) :

$$R \frac{di}{dt} = -B\ell \frac{dv}{dt} = -\frac{B\ell}{m} (i\ell B + F_{op})$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{B^2 \ell^2}{mR} i = -\frac{B\ell}{mR} F_{op}$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau} i = -\frac{B\ell}{mR} F_{op}$$

On retrouve le même temps caractéristique $\tau = \frac{mR}{B^2 \ell^2}$. Au bout de quelques τ , $i \simeq i_\infty$ telle que

$$\frac{B^2 \ell^2}{mR} i_\infty = -\frac{B\ell}{mR} F_{op}$$

$$i_\infty = -\frac{F_{op}}{B\ell}$$

En régime permanent, l'opérateur exerce une force opposée à la force de Laplace.

I.3. Bilan énergétique

$$\begin{cases} \text{(E.M.)} \times v \\ \text{(E.E.)} \times i \end{cases} \quad \begin{cases} m \frac{dv}{dt} = i\ell Bv + F_{\text{op}}v \\ Ri^2 = -Blvi \end{cases}$$

D'où, en éliminant le terme de couplage $i\ell Bv$ entre les deux équations :

$$m \frac{dv}{dt} v = -Ri^2 + F_{\text{op}}v$$

$$F_{\text{op}}v = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) + Ri^2$$

- l'énergie fournie par la force F_{op} exercée par l'opérateur est convertie en énergie cinétique et en énergie électrique (convertie ici en énergie thermique par effet Joule dans la résistance R).
- en régime permanent, $v = v_{\infty} = \text{cte}$, $F_{\text{op}}v = Ri^2$: toute la puissance fournie par l'opérateur est dissipée par effet Joule dans la résistance et $F_{\text{op}} = -F_{\text{Lap}}$.

Soit \mathcal{P}_{fem} la puissance **fournie** par la fem induite :

$$\mathcal{P}_{\text{fem}} = ei = -Blvi$$

Soit \mathcal{P}_{Lap} la puissance de la force de Laplace :

$$\mathcal{P}_{\text{Lap}} = F_{\text{Lap}}v = i\ell Bv$$

On a la relation

$$\mathcal{P}_{\text{Lap}} + \mathcal{P}_{\text{fem}} = 0$$

On peut généraliser ce résultat :

Lorsqu'un circuit mobile est plongé dans un champ magnétique **stationnaire**, il est le siège d'une conversion de puissance électromécanique vérifiant la relation :

$$\mathcal{P}_{\text{Lap}} + \mathcal{P}_{\text{fem}} = 0$$

avec

– \mathcal{P}_{Lap} la puissance de la force de Laplace

– \mathcal{P}_{fem} la puissance fournie par la fem induite par le champ magnétique extérieur $e = -\frac{d\phi^{\text{ext}}}{dt}$

- Si $\mathcal{P}_{\text{fem}} > 0$ alors on a un **générateur électrique** ($\mathcal{P}_{\text{Lap}} < 0$, la force de Laplace s'oppose au mouvement. L'opérateur doit donc fournir de l'énergie pour maintenir le mouvement et produire ainsi un courant électrique).

énergie mécanique \implies énergie électrique

- Si $\mathcal{P}_{\text{Lap}} > 0$ alors on a un **moteur électrique**.

énergie électrique \implies énergie mécanique

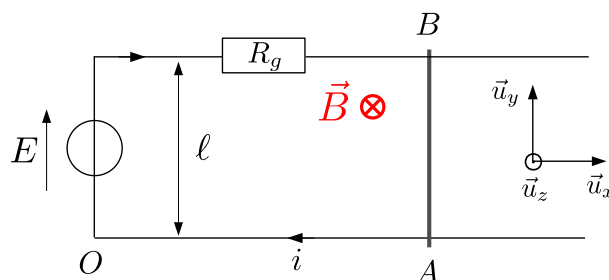
I.4. Méthode générale

- ▷ Commencer par analyser le comportement du dispositif étudié en s'appuyant sur la loi de Lenz
- ▷ orienter le circuit
- ▷ en déduire le sens de la normale au circuit par la règle du tire-bouchon (ou de la main droite)
- ▷ établir l'équation électrique (E.E.)
- ▷ établir l'équation mécanique (E.M.)
- ▷ découpler les équations pour obtenir soit une équation en v , soit une équation en i
- ▷ faire le bilan énergétique $\begin{cases} \text{(E.M.)} \times v \\ \text{(E.E.)} \times i \end{cases}$ et éliminer le terme de couplage entre les deux équations.

I.5. Exercice : rail de Laplace alimenté par un générateur continu

On se place dans le cas où on alimente le circuit avec un générateur modélisé par une source de tension E en série avec une résistance R_g . On néglige la résistance des rails et de la tige devant R_g ainsi que l'inductance propre du circuit. On ferme l'interrupteur à $t = 0$ alors que la tige possède une vitesse nulle. Le champ magnétique est uniforme et a pour expression $\vec{B} = -B\vec{u}_z$ avec $B > 0$ (voir schéma).

1. Expliquer la mise en mouvement de la tige ainsi que l'apparition d'un phénomène d'induction. Déduire de la loi de Lenz le rôle de la fem induite.
2. Établir les équations électrique et mécanique.
3. Déterminer les solutions $i(t)$ et $v(t)$ de ce système d'équations couplées.
4. Faire le bilan énergétique.



1. La fermeture de l'interrupteur provoque la circulation d'un courant $i > 0$. La tige AB subit une force de Laplace qui la dévie vers la droite. Le flux du champ magnétique à travers le circuit varie : il apparaît une fem induite qui s'oppose à la circulation du courant.
2. Équation électrique

$$E - B\ell v = R_g i$$

Équation mécanique

$$m \frac{dv}{dt} = i\ell B$$

3. On en déduit les équations découplées :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{B^2 \ell^2}{m R_g} v = \frac{E \ell B}{m R_g}$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{B^2 \ell^2}{m R_g} i = 0$$

qui admettent pour solutions :

$$v(t) = v_\infty \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \text{avec} \quad v_\infty = \frac{E}{B\ell} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{m R_g}{B^2 \ell^2}$$

$$i(t) = \frac{E}{R_g} e^{-t/\tau}$$

car d'après l'équation électrique à $t = 0^+$:

$$E - \underbrace{Blv(0^+)}_{=0} = R_g i(0^+)$$

$$i(0^+) = \frac{E}{R_g}$$

4. Bilan énergétique

$$Ei = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) + R_g i^2$$

II. Courants volumiques dans un conducteur mobile : freinage par courant de Foucault

Dans le chapitre précédent on a vu qu'il était possible de chauffer des matériaux conducteurs à l'aide d'un champ magnétique variable.

Ainsi, pour éviter l'échauffement du noyau de fer doux d'un transformateur, on entrave la circulation des courants volumiques en feuilletant le milieu ferromagnétique.

Si désormais c'est le conducteur qui est mobile dans un champ magnétique stationnaire, il y apparaît aussi des courants volumiques, dits **courants de Foucault**, qui s'opposent par leurs effets à la cause qui leur a donné naissance, à savoir le mouvement du conducteur. Le conducteur mobile va donc être freiné. Cette propriété est utilisée pour le freinage des poids lourds.

<http://phymain.unisciel.fr/plus-lente-sera-la-chute/>

<http://phymain.unisciel.fr/un-frein-magnetique/>

<http://phymain.unisciel.fr/entrainement-par-courant-de-foucault/>

Émission "On n'est pas des cobayes : *Peut-on freiner sans freins*" commencer à 6 min 10 s.

<https://www.youtube.com/watch?v=vghK5lZTgy4>

III. Haut parleur

III.1. Modélisation

Un haut-parleur permet la conversion d'un signal électrique en signal acoustique via la mise en mouvement d'une membrane. On expose ici le principe du haut-parleur dans le cas de la géométrie simplifiée des rails de Laplace.

Modélisation mécanique : forces s'exerçant sur la membrane

- La membrane du haut-parleur est solidaire de la tige soumise à une force de rappel exercée par un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k . Cette force de rappel modélise l'action des anneaux élastiques reliant la membrane au bâti.

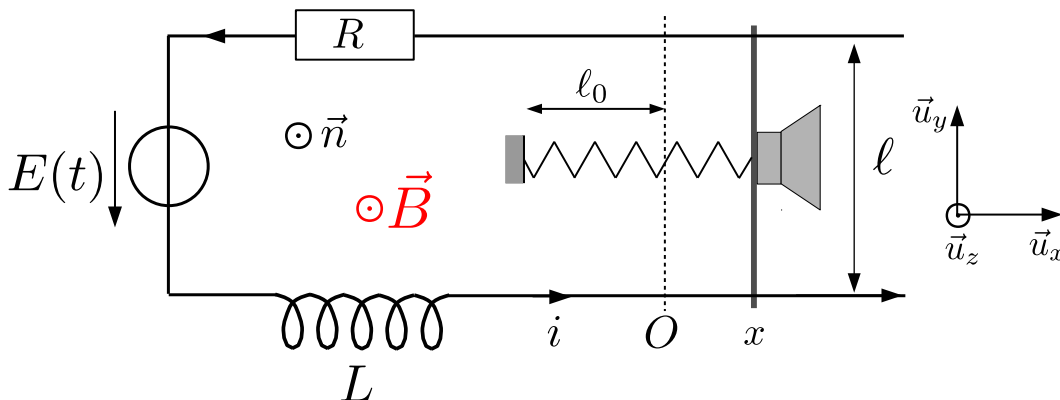
$$\vec{T} = -k(\ell_0 + x - \ell_0)\vec{u}_x = -kx\vec{u}_x$$

- Pour tenir compte de l'émission d'une onde sonore par la membrane, et de la perte d'énergie associée, on ajoute une force supplémentaire de type frottement fluide s'exerçant sur la membrane :

$$\vec{f} = -h\vec{v} = -h\dot{x}\vec{u}_x$$

Modélisation électrique

- Le circuit est alimenté par une tension variable $E(t)$ correspondant au signal électrique à convertir en signal sonore.
- On note L l'inductance propre du circuit. Dans le circuit des rails de Laplace elle est en général négligeable. Cependant, dans un modèle plus réaliste de haut-parleur, mettant en jeu une bobine, on doit en tenir compte.
- On note R la résistance totale du circuit.



Analyse :

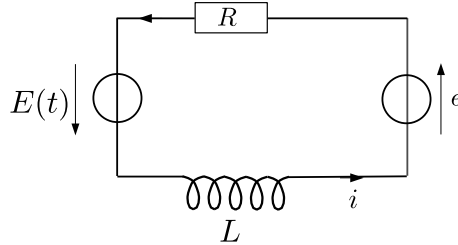
La tension $E(t)$ appliquée fait circuler un courant qui crée une force de Laplace mettant la tige en mouvement. La tige étant mobile dans un champ magnétique stationnaire, il apparaît une fem induite qui tend à s'opposer à la tension $E(t)$. Une partie de l'énergie électrique fournie par la source de tension va être convertie en énergie mécanique (puis en énergie acoustique).

III.2. Mise en équation

a) Équation électrique

- on oriente le circuit (voir schéma)
- en en déduit l'orientation de la normale \vec{n}

On a le schéma équivalent :



D'après la loi des mailles :

$$E(t) - L \frac{di}{dt} + e - Ri = 0$$

avec la fem induite $e = -\frac{d\phi}{dt}$.

On a $\phi = \phi_0 + \ell Bx$ avec ϕ_0 le flux de \vec{B} pour $x = 0$. D'où $e = -\frac{d\phi}{dt} = -\ell B\dot{x} = -\ell Bv$ avec $v = \dot{x}$.

$$E(t) = Ri + L \frac{di}{dt} - e$$

$$E(t) = Ri + L \frac{di}{dt} + \ell B\dot{x}$$

$$\boxed{E(t) = Ri + L \frac{di}{dt} + \ell B\dot{x}} \quad (\text{E.E.})$$

b) Équation mécanique

Système : tige

Référentiel : terrestre galiléen

Bilan des forces :

- poids $\perp \vec{u}_x$
- réactions des rails (supposées normales : pas de frottement) $\perp \vec{u}_x$
- force de rappel : $-kx\vec{u}_x$
- force de frottement : $-hv\vec{u}_x = -h\dot{x}\vec{u}_x$
- force de Laplace : $\vec{F}_{\text{Lap}} = i\ell\vec{u}_y \wedge B\vec{u}_z = i\ell B\vec{u}_x$

PFD sur \vec{u}_x : $m\ddot{x} = -kx - hv + i\ell B$

$$\boxed{m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} + i\ell B} \quad (\text{E.M.})$$

c) Bilan énergétique

$$\begin{cases} E(t)i = Ri^2 + L \frac{di}{dt} i + \ell B\dot{x}i \\ m\dot{x}\dot{x} = -kx\dot{x} - h\dot{x}^2 + i\ell B\dot{x} \end{cases}$$

D'où, en éliminant le terme de couplage $i\ell B\dot{x}$:

$$E(t)i = Ri^2 + h\dot{x}^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right)$$

III.3. Régime sinusoïdal permanent : modèle électrique équivalent

$$E(t) = E_0 \cos \omega t \rightarrow \underline{E} = E_0 e^{j\omega t}$$

On cherche une expression de la forme $\underline{E} = \underline{Z}_{eq} \underline{i}$

On reprend (E.E.) et (E.M.) en notation complexe :

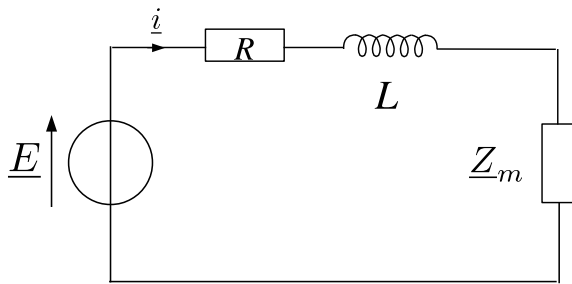
$$\begin{cases} \underline{E} = R\underline{i} + jL\omega\underline{i} + \ell B\underline{v} & \text{E.E.} \\ mj\omega\underline{v} = -\frac{k}{j\omega}\underline{v} - h\underline{v} + \underline{i}\ell B & \text{E.M.} \end{cases}$$

d'après (E.M.) $\underline{v} = \frac{\ell B}{h + jm\omega + \frac{k}{j\omega}} \underline{i}$

on reporte dans (E.E.) :

$$\underline{E} = R\underline{i} + jL\omega\underline{i} + \frac{\ell^2 B^2}{h + jm\omega + \frac{k}{j\omega}} \underline{i}$$

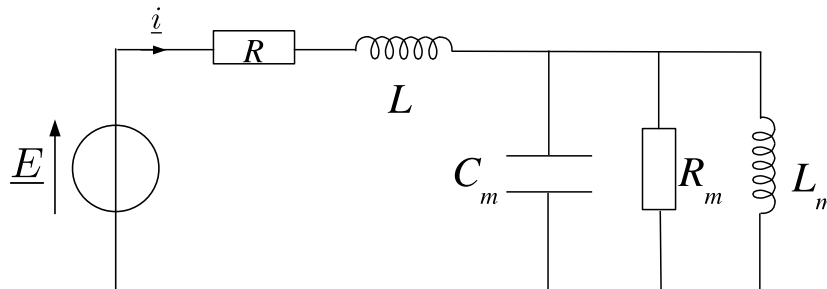
$$\underline{E} = \left(R + jL\omega + \frac{\ell^2 B^2}{h + jm\omega + \frac{k}{j\omega}} \right) \underline{i} = (R + jL\omega + \underline{Z}_m) \underline{i}$$



\underline{Z}_m est appelée impédance motionnelle.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\underline{Z}_m} &= \frac{h}{\ell^2 B^2} + j \frac{m\omega}{\ell^2 B^2} + \frac{k}{j\ell^2 B^2 \omega} \\ &= \frac{1}{R_m} + jC_m \omega + \frac{1}{jL_m \omega} \end{aligned}$$

Schéma électrique équivalent :



$$R_m = \frac{\ell^2 B^2}{h} \quad C_m = \frac{m}{\ell^2 B^2} \quad L_m = \frac{\ell^2 B^2}{k}$$

III.4. Bilan énergétique

On a établi au III.2.c.

$$E(t)i = Ri^2 + h\dot{x}^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right)$$

Prenons la valeur moyenne de cette égalité :

$$\langle E(t)i \rangle = \langle Ri^2 \rangle + \langle h\dot{x}^2 \rangle + \left\langle \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right) \right\rangle$$

Les fonctions \dot{x}^2 , x^2 et i^2 sont des fonctions périodiques. Or, La valeur moyenne de la dérivée d'une fonction périodique est nulle.

Vérification : Soit $f(t)$ une fonction périodique de période T .

$$\left\langle \frac{df(t)}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{df(t)}{dt} dt = \frac{1}{T} [f(t)]_{t_0}^{t_0+T} = \frac{f(t_0+T) - f(t_0)}{T} = 0$$

d'où

$$\left\langle \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right) \right\rangle = 0$$

Le bilan énergétique devient :

$$\boxed{\langle E(t)i \rangle = \langle Ri^2 \rangle + \langle h\dot{x}^2 \rangle}$$

- $\langle E(t)i \rangle$ correspond à la puissance fournie
- $\langle Ri^2 \rangle$ est la puissance dissipée par effet Joule
- $\langle h\dot{x}^2 \rangle$ est la puissance de la force de frottement fluide : elle modélise la perte d'énergie associée à l'émission d'une onde acoustique. Ce terme mesure donc la puissance acoustique émise.

On peut définir la rendement d'un haut parleur par :

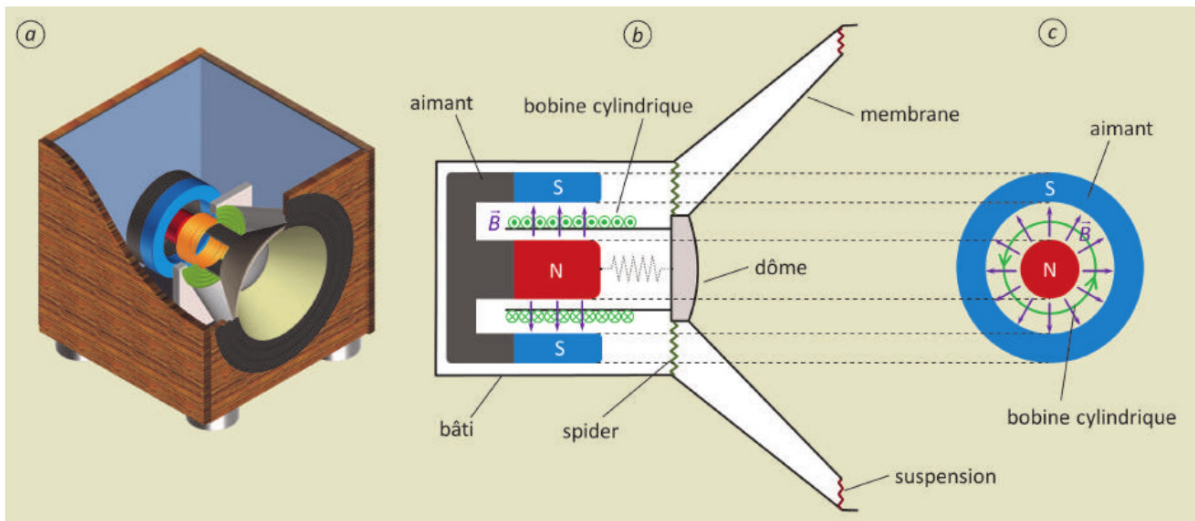
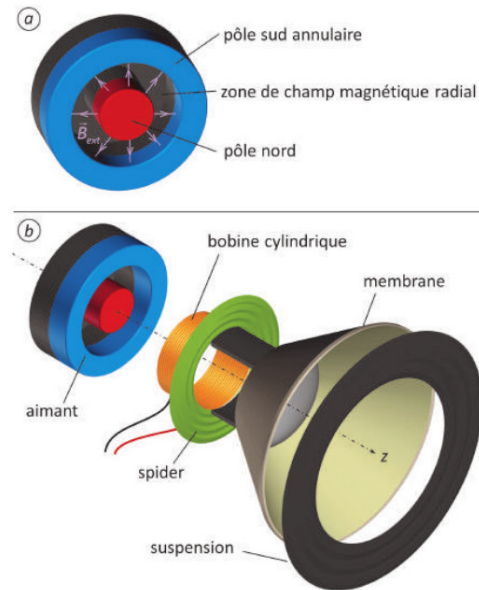
$$\eta = \frac{\langle h\dot{x}^2 \rangle}{\langle E(t)i \rangle}$$

Remarque : les rendements typiques des haut-parleurs sont de l'ordre de 2 à 3%.

III.5. Description d'un haut-parleur réel

Le haut-parleur réel possède une géométrie différente de celle modélisée par le rail de Laplace, mais son principe de fonctionnement est totalement comparable.

- le champ magnétique est créé par un **aimant torique (ou annulaire)** produisant un champ magnétique radial de la forme $\vec{B} = B\vec{e}_r$. L'entrefer est donc une cavité cylindrique.
- le circuit mis en mouvement par les forces de Laplace est une **bobine cylindrique** d'axe Oz susceptible de se translater suivant l'axe Oz .
- la bobine est liée à une membrane maintenue en place par deux **anneaux élastiques** appelés spider et suspension. Ce dispositif est modélisé par un ressort



Remarque : La présence de la bobine justifie a posteriori la prise en compte de l'inductance propre du circuit dans le modèle avec rails de Laplace.

Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire	
Circuit en translation rectiligne dans un champ magnétique stationnaire. Rail de Laplace	Interpréter qualitativement les phénomènes observés dans le cas du rail de Laplace. Établir les équations électrique et mécanique en précisant les conventions de signe. Établir et interpréter la relation entre la puissance de la force de Laplace et la puissance électrique. Effectuer un bilan énergétique. Expliquer l'origine des courants de Foucault et en connaître des exemples d'utilisation.
Conversion de puissance électrique en puissance mécanique Haut-parleur électrodynamique	Expliquer le principe de fonctionnement d'un haut-parleur électrodynamique. Établir l'équation mécanique et l'équation électrique. Effectuer un bilan énergétique. Effectuer une étude en régime sinusoïdal forcé.