

## EM 4b Champ magnétostatique créé par des distributions

On souhaite calculer le champ magnétique créé par des distributions de courant indépendantes du temps.

### I. Équations de Maxwell de la magnétostatique

#### I.1. Équation de Maxwell-Ampère

On a vu que, contrairement au champ électrostatique, les lignes de champ magnétiques se refermaient sur elles-mêmes. Dans le cas du fil infini, elles entourent le fil parcouru par un courant. On peut en déduire, que dans ce cas,  $\text{rot } \vec{B} \neq \vec{0}$ .

L'équation de Maxwell-Ampère complète est :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

En régime stationnaire cette équation devient :

Équation de Maxwell-Ampère de la **statique** :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

avec  $\mu_0$  la perméabilité magnétique du vide :  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ .

Conséquence :

D'après le théorème de Stokes :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

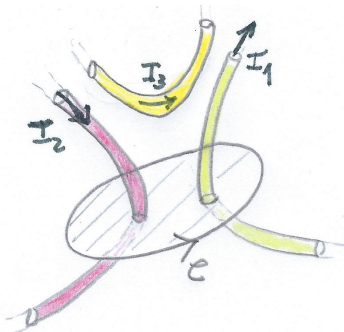
où  $\Sigma$  est une surface s'appuyant sur le contour  $C$  et dont l'orientation se déduit de celle du contour  $C$  par la règle de la main droite. Or  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ , d'où :

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \iint_{\Sigma} \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S} \\ &= \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} \\ &= \mu_0 I_{\text{enlacé}} \end{aligned}$$

**Théorème d'Ampère** : la circulation du champ magnétostatique le long d'un contour  $C$ , fermé, orienté, est égale à la somme algébrique des courants enlacés par ce contour :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

le sens d'orientation du courant se déduit du sens d'orientation du circuit par la règle de la main droite.



Exemple :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (I_1 - I_2)$$

## I.2. Équation de Maxwell-flux (ou Maxwell-Thomson)

Équation de Maxwell relative au flux de  $\vec{B}$  :

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Conséquences :

$\vec{B}$  est à flux conservatif. L'intensité du champ magnétique augmente si les lignes de champ se rapprochent. Dans le vide, si les lignes de champ restent parallèles, le champ magnétique est uniforme. Les lignes de champ magnétique ne peuvent converger ou diverger d'un point.

## I.3. Méthode générale pour calculer un champ magnétique

Le théorème d'Ampère permet de calculer facilement des champs magnétiques créés par des distributions à haut degré de symétrie.

- Choisir les coordonnées adaptées à la géométrie du problème
- Étudier les invariances par translation ou par rotation pour éliminer des variables
- Étudier les symétries et les antisymétries de la distribution de courant pour éliminer des composantes du champ  $\vec{B}$ .
- Choisir un circuit  $\mathcal{C}$  adapté pour calculer la circulation du champ  $\vec{B}$ . En général, le contour suit des lignes de champ ( $\vec{B} // d\vec{\ell}$ ), mais il présente parfois des parties orthogonales au champ ( $\vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$ )

# II. Champ magnétique créé par des distributions à géométrie cylindrique

## II.1. Fil infini

$z$



– Choix des coordonnées : cylindriques

$$\vec{B} = \vec{B}(r, \theta, z)$$

– La distribution de courant  $\mathcal{D}$  est invariante par translation quelconque parallèlement à  $\vec{u}_z$  :  $\vec{B}$  est indépendant de  $z$ .

– La distribution de courant  $\mathcal{D}$  est invariante par rotation quelconque autour de  $\vec{u}_z$  :  $\vec{B}$  est indépendant de  $\theta$ .

$$\vec{B} = \vec{B}(z) = B_r(z)\vec{u}_r + B_\theta(r)\vec{u}_\theta + B_z(r)\vec{u}_z$$

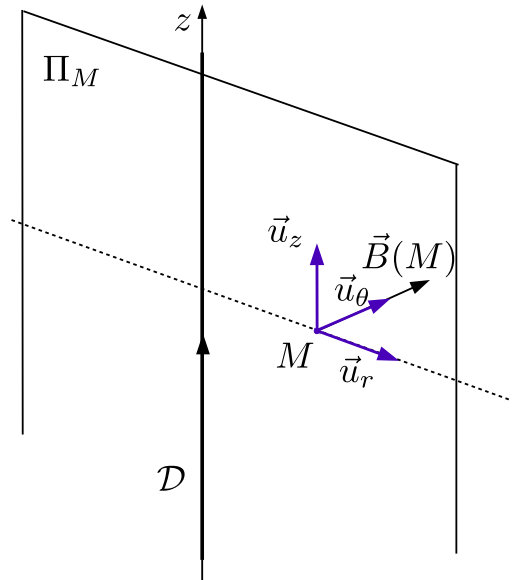
- Tout plan contenant  $Oz$  est plan de symétrie.

Soit  $M$  un point quelconque. Soit  $\Pi_M = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  le plan passant par  $M$  et contenant l'axe  $Oz$ . C'est un plan de symétrie pour les courants donc d'antisymétrie pour  $\vec{B}$ .

$$\vec{B}(M) \perp \Pi_M$$

On en déduit que  $\vec{B}(M)$  est colinéaire à  $\vec{u}_\theta$  : il est dit **orthoradial**.

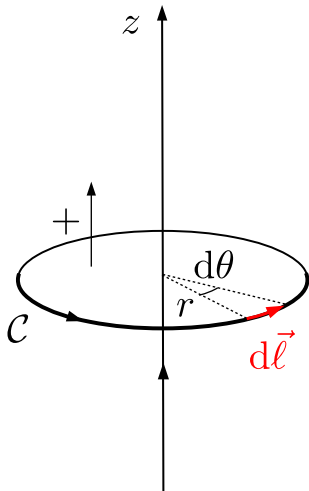
$$\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$$



Les lignes de champ magnétique sont des cercles d'axe  $Oz$ .

On applique le théorème d'Ampère.

Choix du circuit  $\mathcal{C}$  : on calcule la circulation du champ magnétique sur un cercle de rayon  $r$ , d'axe  $Oz$  orienté dans le sens de  $\vec{u}_\theta$ . L'orientation de la surface s'en déduit par la règle de la main droite : la surface est donc orientée dans le sens de  $+\vec{u}_z$ .



$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

avec

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\mathcal{C}} B(r)\vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = \oint_{\mathcal{C}} B(r)r d\theta = B(r)r \oint_{\mathcal{C}} d\theta = B(r)2\pi r$$

$$B(r)2\pi r = \mu_0 I$$

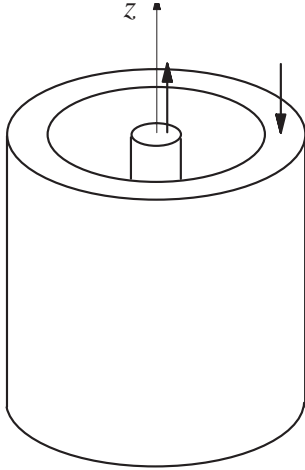
$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

Le champ magnétique  $\vec{B}$  n'est pas défini sur le fil ( $r = 0$ ). De manière générale le champ magnétique n'est pas défini au niveau d'une distribution linéique de courant.

## II.2. Coaxial

Un câble coaxial est constitué par un conducteur cylindrique plein de rayon  $R_1$  entouré par un conducteur externe occupant le volume compris entre les cylindres de rayons  $R_2$  et  $R_3$ . Les trois cylindres sont coaxiaux. Un courant  $I$  circule dans le conducteur intérieur et revient en sens inverse dans le conducteur extérieur. On suppose que la répartition volumique de courant est uniforme dans chacune des sections du conducteur. On note  $\vec{j}_{int} = j_{int}\vec{u}_z$  la densité volumique de courant dans le conducteur intérieur et  $\vec{j}_{ext} = -j_{ext}\vec{u}_z$  la densité volumique de courant dans le conducteur extérieur.



– Choix des coordonnées : cylindriques

$$\vec{B} = \vec{B}(r, \theta, z)$$

– La distribution vérifie les mêmes invariances par translation suivant  $\vec{u}_z$  et par rotation autour de  $Oz$  et les mêmes symétries par rapport à tout plan contenant l'axe  $Oz$  que le fil infini. On en déduit de même

$$\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$$

Les lignes de champ magnétique sont des cercles d'axe  $Oz$ .

On choisit donc le même circuit pour appliquer le théorème d'Ampère :  $\mathcal{C}$  cercle de rayon  $r$ , d'axe  $Oz$  orienté dans le sens de  $\vec{u}_\theta$ . L'orientation de la surface orientée dans le sens de  $+\vec{u}_z$ . L'expression de la circulation est inchangée

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r)2\pi r$$

Par contre, l'intensité des courants enlacés varie suivant les valeurs de  $r$ .

### Calcul de densité volumique de courant

$$I = j_{int}\pi R_1^2$$

$$I = j_{ext}\pi(R_3^2 - R_2^2)$$

### Calcul du champ

$$r \leq R_1 : B(r)2\pi r = \mu_0 j_{int}\pi r^2$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 j_{int} r}{2} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$$

$$R_1 \leq r \leq R_2 : B(r)2\pi r = \mu_0 I$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$R_2 \leq r \leq R_3 : B(r)2\pi r = \mu_0(I - j_{ext}\pi(r^2 - R_2^2))$$

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I \left( 1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right)$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left( \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \right)$$

$$R_3 \leq r : B(r)2\pi r = \mu_0(I - I) = 0$$

$$B(r) = 0$$

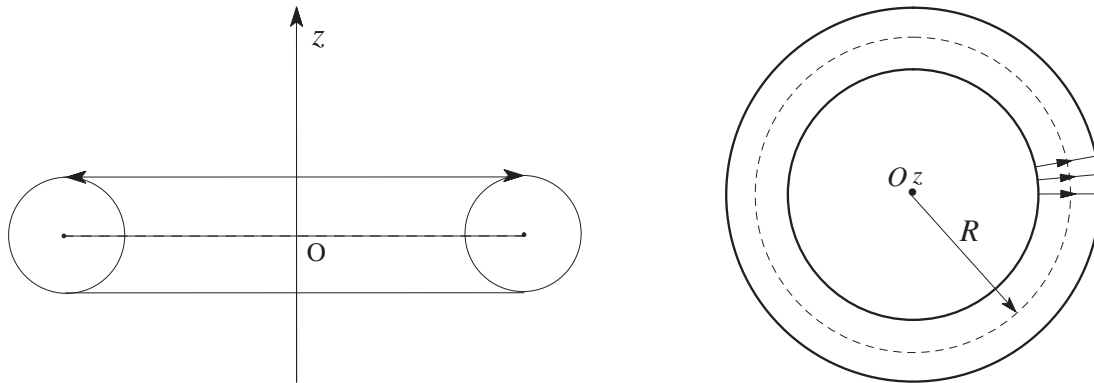
Remarque :

Pour  $r \leq R_1$   $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 j_{int}}{2} r \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0}{2} \vec{j}_{int} \wedge \overrightarrow{OM}$  avec  $\begin{cases} \vec{j}_{int} = j_{int}\vec{u}_z \\ \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z \end{cases}$

Le champ magnétique  $\vec{B}$  est défini en tout point. De manière générale le champ magnétique créé par une distribution volumique de courant est défini et continu en tout point.

### II.3. Champ magnétique créé par un tore

On considère une bobine en forme de tore (pour visualiser sa forme, penser à une bouée ou à un donut). Le tore comporte  $N$  spires circulaires jointives de rayon  $a$  parcourues par un courant d'intensité  $I$ .



- Choix des coordonnées : cylindriques

$$\vec{B} = \vec{B}(r, \theta, z)$$

- La distribution de courant  $\mathcal{D}$  est invariante par rotation quelconque autour de  $\vec{u}_z$  :  $\vec{B}$  est indépendant de  $\theta$ .

$$\vec{B} = \vec{B}(r, z) = B_r(r, z)\vec{u}_r + B_\theta(r, z)\vec{u}_\theta + B_z(r, z)\vec{u}_z$$

- Tout plan contenant  $Oz$  est plan de symétrie.

Soit  $M$  un point quelconque. Soit  $\Pi_M = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  le plan passant par  $M$  et contenant l'axe  $Oz$ . C'est un plan de symétrie pour les courants donc d'antisymétrie pour  $\vec{B}$ .

$$\vec{B}(M) \perp \Pi_M$$

On en déduit que  $\vec{B}(M)$  est colinéaire à  $\vec{u}_\theta$ .

$$\vec{B}(M) = B(r, z)\vec{u}_\theta$$

Les lignes de champ magnétique sont des cercles d'axe  $Oz$ .

On applique le théorème d'Ampère.

Choix du circuit  $\mathcal{C}$  : on calcule la circulation du champ magnétique sur un cercle de rayon  $r$ , d'axe  $Oz$  orienté dans le sens de  $\vec{u}_\theta$ . La surface est donc orientée dans le sens de  $+\vec{u}_z$ .

Premier cas : le cercle est à l'intérieur du tore

$$2\pi r B(r, z) = \mu_0 N I$$

$$B(r, z) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

$$\vec{B}_{\text{int}} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

Deuxième cas : le cercle est à l'extérieur du tore

$$2\pi r B(r, z) = 0$$

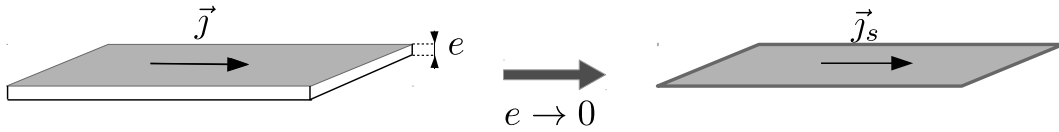
$$B(r, z) = 0$$

$$\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

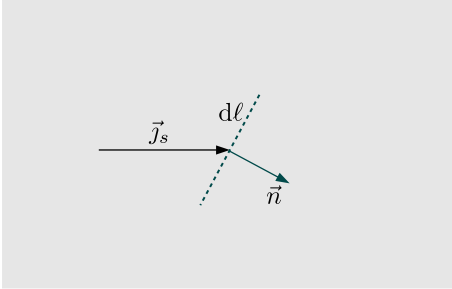
### III. Champ magnétique créé par une nappe de courant

#### III.1. Densité surfacique de courant

Lorsqu'une distribution de courant possède une épaisseur faible devant ses autres dimensions (longueur, largeur) on la modélise par une distribution surfacique de courant  $\vec{j}_s$ .



$$\vec{j}e \leftrightarrow \vec{j}_s \quad \text{pour } e \rightarrow 0$$



L'intensité du courant traversant une ligne de longueur  $d\ell$  et de normale orientée  $\vec{n}$  vaut

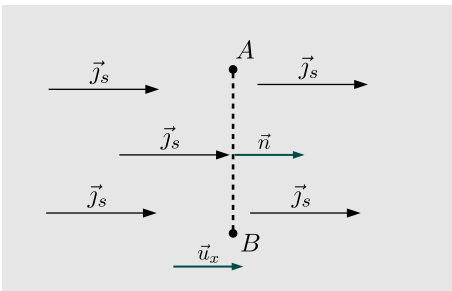
$$\vec{j}_s \cdot d\ell \vec{n}$$

L'intensité traversant une ligne  $\mathcal{L}$  s'en déduit par intégration :

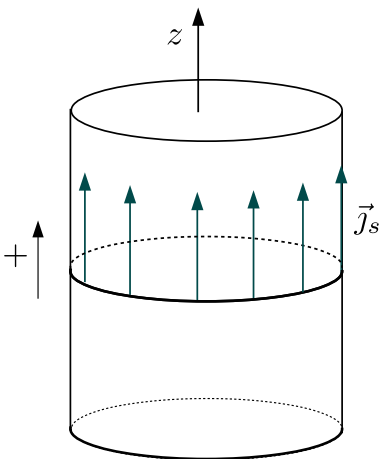
$$I = \int_{\mathcal{L}} \vec{j}_s \cdot d\ell \vec{n}$$

Dimensionnellement :  $[\|\vec{j}_s\|] = \text{A.m}^{-1}$

Exemples :

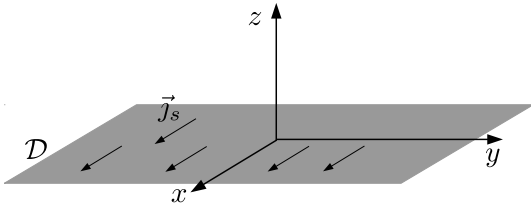


On considère une distribution surfacique de courant plane uniforme  $\vec{j}_s = j_s \vec{u}_x$ . Exprimer l'intensité du courant traversant la ligne  $AB$  de longueur  $\ell$ .



On considère une distribution surfacique de courant uniforme  $\vec{j}_s = j_s \vec{u}_z$ , circulant sur une surface cylindrique, de rayon  $R$ . Exprimer l'intensité du courant traversant le cercle indiqué sur le schéma.

### III.2. Nappe de courant plane infinie



On considère une distribution surfacique de courant, plane, infinie, situé dans le plan  $z = 0$  et caractérisée par la densité surfacique de courant

$$\vec{j}_s = j_s \vec{u}_x$$

- Choix des coordonnées : cartésiennes

$$\vec{B} = \vec{B}(x, y, z)$$

- La distribution de courant  $\mathcal{D}$  est invariante par translation quelconque parallèlement à  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  :  $\vec{B}$  est indépendant de  $x$  et  $y$ .
- Tout plan contenant parallèle au plan  $xOz$  est plan de symétrie pour les courants. Soit  $M$  un point quelconque. Soit  $\Pi_{Mxz} = (M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$  le plan passant par  $M$  et parallèle au plan  $xOz$ . C'est un plan de symétrie pour les courants donc d'antisymétrie pour  $\vec{B}$ .

$$\vec{B}(M) \perp \Pi_{Mxz}$$

On en déduit que  $\vec{B}(M)$  est colinéaire à  $\vec{u}_y$ .

$$\vec{B}(M) = B(z) \vec{u}_y$$

- Le plan  $xOy$  est plan de symétrie pour les courants donc d'antisymétrie pour  $\vec{B}$ . On en déduit

$$\vec{B}(-z) = -\vec{B}(z)$$

La fonction  $B(z)$  est une fonction impaire.

Les lignes de champ magnétique sont des droites parallèles à l'axe  $Oz$ .

Choix du circuit  $\mathcal{C}$  : un circuit rectangulaire placé dans un plan vertical et compris entre  $-z$  et  $z$ .

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

avec

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \int_A^B \vec{B}(z) \cdot d\vec{\ell} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{B}(-z) \cdot d\vec{\ell} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \vec{B}(z) \cdot \overrightarrow{AB} + \underbrace{\vec{B}(-z)}_{=-\vec{B}(z)} \cdot \underbrace{\overrightarrow{CD}}_{=-\overrightarrow{AB}} \\ &= 2\vec{B}(z) \cdot \overrightarrow{AB} = 2B(z) \vec{u}_y \cdot (-\ell) \vec{u}_y \\ &= -2B(z) \ell \end{aligned}$$

et

$$I = j_s \ell$$

d'où

$$\text{Pour } z > 0, \vec{B} = -\mu_0 \frac{j_s}{2} \vec{u}_y = \frac{\mu_0}{2} \vec{j}_s \wedge \vec{u}_z$$

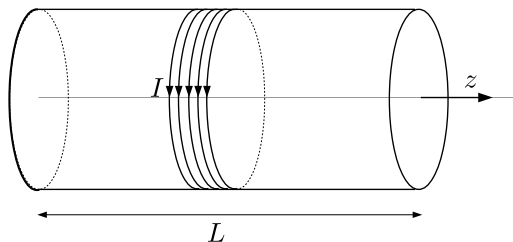
$$\text{Pour } z < 0, \vec{B} = \mu_0 \frac{j_s}{2} \vec{u}_y = -\frac{\mu_0}{2} \vec{j}_s \wedge \vec{u}_z$$

Le champ magnétique n'est pas défini sur la distribution. On observe une discontinuité du champ magnétique à la traversée de la surface chargée.

$$\vec{B}(0+) - \vec{B}(0-) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_z$$



### IV. Champ magnétique créé par un solénoïde infini



On considère un solénoïde constitué de  $N$  spires circulaires enroulées autour d'un cylindre de rayon  $R$  et de longueur  $L$ , parcourues par un courant d'intensité  $I$ . On définit  $n = \frac{N}{L}$  le nombre de spires par unité de longueur.

On considère  $L \gg R$  et on assimile le solénoïde à un solénoïde infini.

- Choix des coordonnées : cylindriques

$$\vec{B} = \vec{B}(r, \theta, z)$$

- La distribution de courant est invariante par translation quelconque parallèlement à  $\vec{u}_z$  :  $\vec{B}$  est indépendant de  $z$ .
- La distribution de courant est invariante par rotation quelconque autour de  $Oz$  :  $\vec{B}$  est indépendant de  $\theta$ .

$$\vec{B} = \vec{B}(r)$$

- Tout plan contenant perpendiculaire à  $Oz$  est plan de symétrie pour la distribution de courant et donc d'antisymétrie pour  $\vec{B}$ .

Soit  $M$  un point quelconque. Soit  $\Pi_{\perp} = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_{\theta})$  le plan passant par  $M$  et perpendiculaire à l'axe  $Oz$ .

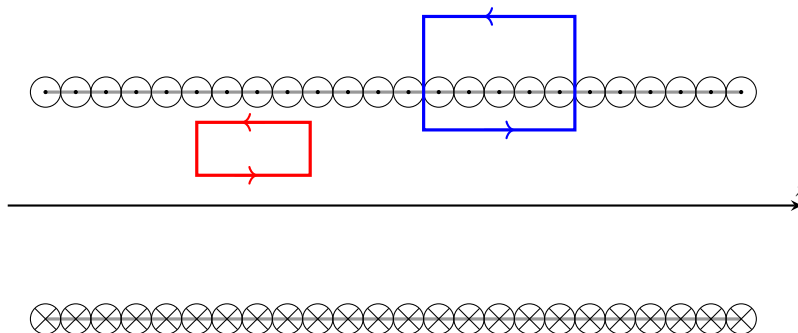
$$\vec{B}(M) \perp \Pi_{\perp}$$

On en déduit que  $\vec{B}(M)$  est colinéaire à  $\vec{u}_z$ .

$$\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_z$$

Les lignes de champ sont des droites perpendiculaires à l'axe  $Oz$ .

On envisage comme circuit  $\mathcal{C}$  des rectangles situés dans un plan contenant l'axe du solénoïde : soit à totalement à l'intérieur, (ou totalement à l'extérieur) soit "à cheval" sur la surface du solénoïde.



Bilan :

$$\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 n I \vec{u}_z$$

$$\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$$



## V. Relation de passage du champ magnétostatique

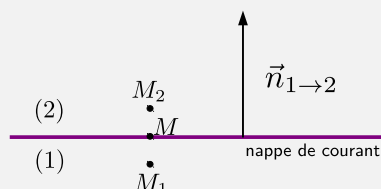
Il y a continuité du champ magnétique lorsque la distribution de courant est volumique (voir champ magnétique créé par un coaxial).

Une densité surfacique de courant est une modélisation d'une distribution volumique de courant d'épaisseur nulle. Ce passage à la limite entraîne une discontinuité du champ magnétique au niveau de la nappe de courant. Les relations trouvées pour une nappe surfacique plane et pour le solénoïde sont en fait généralisables à toute nappe de courant.

Soit  $\vec{B}_1$  le champ magnétique en un point  $M_1$  infiniment proche du point  $M$  de la surface, côté 1, et  $\vec{B}_2$  le champ magnétique en un point  $M_2$  infiniment proche de  $M$  mais du côté 2. On a

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

avec  $\vec{j}_s$  la densité surfacique de courant au niveau du point  $M$  de la surface.



Conséquence :

- la composante normale de  $\vec{B}$  est continue
- seule la composante tangentielle de  $\vec{B}$  est discontinue

Magnétostatique du vide	
Équation de Maxwell-Ampère de la statique, théorème d'Ampère et équation de Maxwell relative au flux du champ magnétique	Énoncer le théorème d'Ampère et le relier à l'équation de Maxwell-Ampère de la statique. Énoncer l'équation de Maxwell relative au flux du champ magnétique. Utiliser le théorème d'Ampère pour déterminer le champ magnétostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie (fil infini, câble coaxial, nappe de courant supposée « infinie », tore, solénoïde « infini » en admettant que le champ magnétique est nul à l'extérieur). Énoncer les relations de passage du champ magnétostatique.