EM 4b Champ magnétostatique créé par des distributions

On souhaite calculer le champ magnétique créé par des distributions de courant indépendantes du temps.

I. Équations de Maxwell de la magnétostatique

I.1. Équation de Maxwell-Ampère

On a vu que, contrairement au champ électrostatique, les lignes de champ magnétiques se refermaient sur elles-mêmes. Dans le cas du fil infini, elles entourent le fil parcouru par un courant. On peut en déduire, que dans ce cas, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} \neq \vec{0}$.

L'équation de Maxwell-Ampère complète est :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

En régime stationnaire cette équation devient :

Équation de Maxwell-Ampère de la **statique** :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

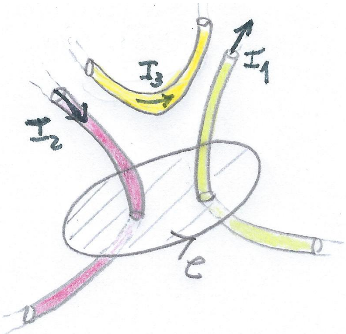
avec μ_0 la perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}.

Conséquence :

Théorème d'Ampère : la circulation du champ magnétostatique le long d'un contour $\mathcal{C}$, fermé, orienté, est égale à la somme algébrique des courants enlacés par ce contour :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}.\mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

le sens d'orientation du courant se déduit du sens d'orientation du circuit par la règle de la main droite.



Exemple :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}.\mathrm{d}\vec{\ell} =$$

I.2. Équation de Maxwell-flux (ou Maxwell-Thomson)

Équation de Maxwell relative au flux de $\vec{B}$:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Conséquences :
$\vec{B}$ est à flux conservatif. L'intensité du champ magnétique augmente si les lignes de champ se rapprochent.
Dans le vide, si les lignes de champ restent parallèles, le champ magnétique est uniforme.
Les lignes de champ magnétique ne peuvent converger ou diverger d'un point.

I.3. Méthode générale pour calculer un champ magnétique

Le théorème d'Ampère permet de calculer facilement des champs magnétiques créés par des distributions à haut degré de symétrie.

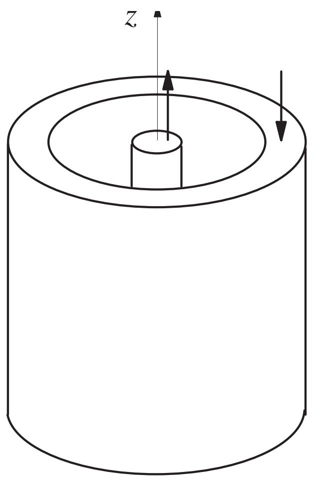
- Choisir les coordonnées adaptées à la géométrie du problème
- Étudier les invariances par translation ou par rotation pour éliminer des variables
- Étudier les symétries et les antisymétries de la distribution de courant pour éliminer des composantes du champ $\vec{B}$.
- Choisir un circuit $\mathcal{C}$ adapté pour calculer la circulation du champ $\vec{B}$. En général, le contour suit des lignes de champ ($\vec{B}//d\vec{\ell}$), mais il présente parfois des parties orthogonales au champ ($\vec{B}.d\vec{\ell} = 0$)

II. Champ magnétique créé par des distributions à géométrie cylindrique

II.1. Fil infini

II.2. Coaxial

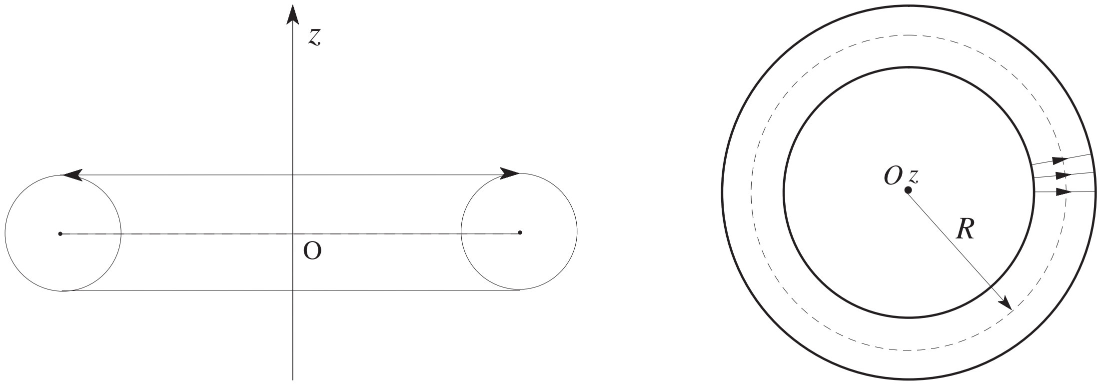
Un câble coaxial est constitué par un conducteur cylindrique plein de rayon R_1 entouré par un conducteur externe occupant le volume compris entre les cylindres de rayons R_2 et R_3. Les trois cylindres sont coaxiaux. Un courant I circule dans le conducteur intérieur et revient en sens inverse dans le conducteur extérieur. On suppose que la répartition volumique de courant est uniforme dans chacune des sections du conducteur. On note $\vec{j}_{int} = j_{int}\vec{u}_z$ la densité volumique de courant dans le conducteur intérieur et $\vec{j}_{ext} = -j_{ext}\vec{u}_z$ la densité volumique de courant dans le conducteur extérieur.



Le champ magnétique $\vec{B}$ est défini en tout point. De manière générale le champ magnétique créé par une distribution volumique de courant est défini et continu en tout point.

II.3. Champ magnétique créé par un tore

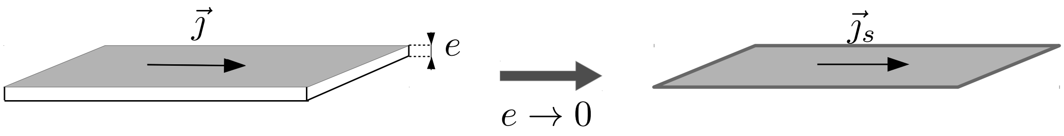
On considère une bobine en forme de tore (pour visualiser sa forme, penser à une bouée ou à un donut). Le bobine comporte N spires circulaires jointives de rayon a parcourues par un courant d'intensité I.



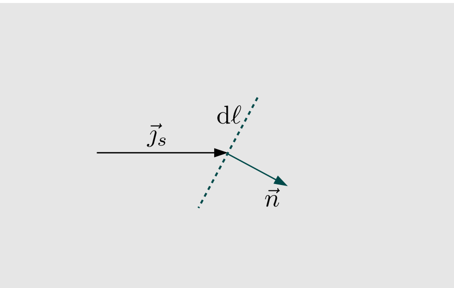
III. Champ magnétique créé par une nappe de courant

III.1. Densité surfacique de courant

Lorsqu'une distribution de courant possède une épaisseur faible devant ses autres dimensions (longueur, largeur) on la modélise par une distribution surfacique de courant $\vec{\jmath}_s$.



$\vec{\jmath}\, e \leftrightarrow \vec{\jmath}_s \quad$ pour $e \to 0$



L'intensité du courant traversant une ligne de longueur dℓ et de normale orientée $\vec{n}$ vaut

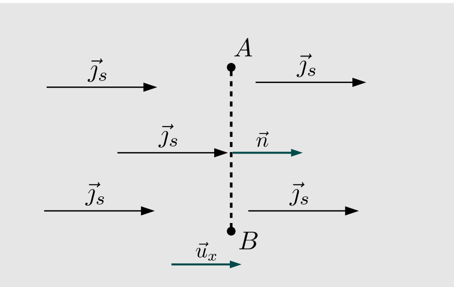
$$\vec{\jmath}_s.\mathrm{d}\ell\vec{n}$$

L'intensité traversant une ligne $\mathcal{L}$ s'en déduit par intégration :

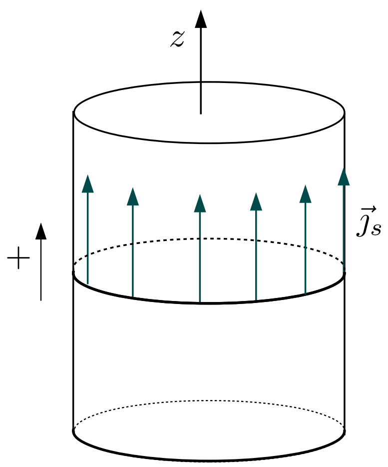
$$I = \int_{\mathcal{L}} \vec{\jmath}_s.\mathrm{d}\ell\vec{n}$$

Dimensionnellement : $[\|\vec{\jmath}_s\|] =$

Exemples :

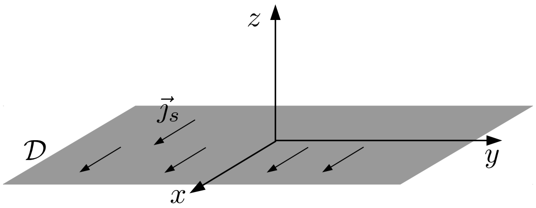


On considère une distribution surfacique de courant plane uniforme $\vec{\jmath}_s = j_s\vec{u}_x$. Exprimer l'intensité du courant traversant la ligne AB de longueur ℓ.



On considère une distribution surfacique de courant uniforme $\vec{\jmath}_s = j_s\vec{u}_z$, circulant sur une surface cylindrique, de rayon R. Exprimer l'intensité du courant traversant le cercle indiqué sur le schéma.

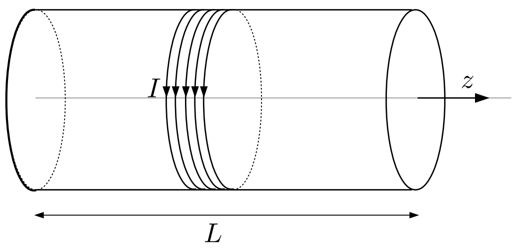
III.2. Nappe de courant plane infinie



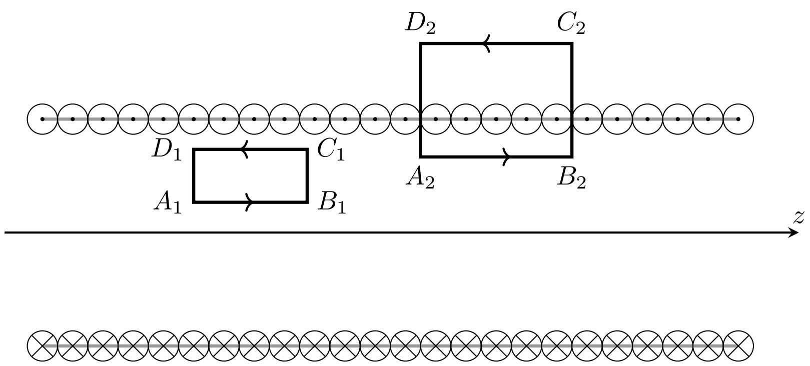
On considère une distribution surfacique de courant, plane, infinie, situé dans le plan $z = 0$ et caractérisée par la densité surfacique de courant

$$\vec{j}_s = j_s \vec{u}_x$$

IV. Champ magnétique créé par un solénoïde infini



On considère un solénoïde constitué de N spires circulaires enroulées autour d'un cylindre de rayon R et de longueur L, parcourues par un courant d'intensité I. On définit $n = \frac{N}{L}$ le nombre de spires par unité de longueur.
On considère $L \gg R$ et on assimile le solénoïde à un solénoïde infini.



V. Relation de passage du champ magnétostatique

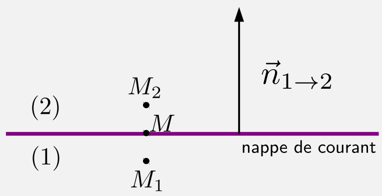
Il y a continuité du champ magnétique lorsque la distribution de courant est volumique (voir champ magnétique créé par un coaxial.

Une densité surfacique de courant est une modélisation d'une distribution volumique de courant d'épaisseur nulle. Ce passage à la limite entraîne une discontinuité du champ magnétique au niveau de la nappe de courant. Les relations trouvées pour une nappe surfacique plane et pour le solénoïde sont en fait généralisables à toute nappe de courant.

Soit $\vec{B}_1$ le champ magnétique en un point M_1 infiniment proche du point M de la surface, côté 1, et $\vec{B}_2$ le champ magnétique en un point M_2 infiniment proche de M mais du côté 2. On a

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{\jmath}_s \wedge \vec{n}_{1\to 2}$$

avec $\vec{\jmath}_s$ la densité surfacique de courant au niveau du point M de la surface.



Conséquence :
– la composante normale de $\vec{B}$ est continue
– seule la composante tangentielle de $\vec{B}$ est discontinue

Magnétostatique du vide	
Équation de Maxwell-Ampère de la statique, théorème d'Ampère et équation de Maxwell relative au flux du champ magnétique	Énoncer le théorème d'Ampère et le relier à l'équation de Mawxell-Ampère de la statique. Énoncer l'équation de Maxwell relative au flux du champ magnétique. Utiliser le théorème d'Ampère pour déterminer le champ magnétostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie (fil infini, câble coaxial, nappe de courant supposée « infinie », tore, solénoïde « infini » en admettant que le champ magnétique est nul à l'extérieur). Énoncer les relations de passage du champ magnétostatique.