EL3 - Circuits linéaires en régime sinusoïdal établi

Table des matières

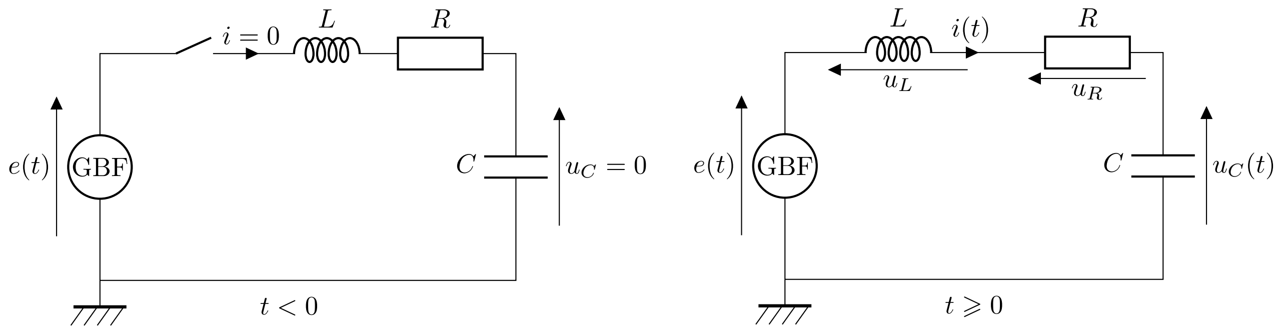
Les tensions délivrées sur le réseau électrique sont des tensions alternatives de fréquence 50 Hz.

On va donc s'intéresser dans ce chapitre au fonctionnement de réseaux comportant des dipôles linéaires lorsqu'ils sont alimentés par des tensions sinusoïdales.

I. Régime sinusoïdal permanent

I.1. Exemple du circuit RLC série

On considère un circuit RLC série. À l'instant $t = 0$ on relie ce circuit à une source tension idéale délivrant une tension sinusoïdale $e(t) = E_m \cos \omega t$.



On cherche à établir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$. Le calcul a déjà été mené au chapitre précédent.

D'après la loi des mailles

$e(t) - u_R - u_L - u_C = 0$

$e(t) = u_R + u_L + u_c$

$e(t) = Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_C$

avec $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ (on est en convention récepteur). D'où

$e(t) = RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + u_C$

La tension $u_C(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$LC\ddot{u}_C + RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = e(t)$

que l'on peut exprimer sous la forme :

$$\ddot{u}_C + \frac{R}{L}\dot{u}_C + \frac{1}{LC}u_C = \frac{1}{LC}e(t).$$

On peut réécrire le membre de gauche sous la forme canonique déjà rencontrée lors de l'étude de l'oscillateur amorti.

$$\ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 e(t)$$

$$\boxed{\ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E_m \cos \omega t} \tag{E}$$

avec

$\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$, $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ la **pulsation propre** du circuit

et

$\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{R}{L}$, $\boxed{Q = \dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}}$ le **facteur de qualité** du circuit.

I.2. Régime transitoire - régime permanent

On doit résoudre une équation différentielle du type :

$$\boxed{\ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E_m \cos\omega t} \qquad \text{(E)}$$

La solution de l'équation est la superposition :

- de la solution $u_{C_h}(t)$ de l'équation linéaire homogène associée (E0)

$$\ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = 0 \qquad \text{(E0)}$$

  $u_{C_h}(t)$ correspond à un des trois régimes d'oscillations libres rencontrés en EL2 (pseudo-périodique, critique, apériodique). Cette solution tend vers 0 au bout d'un certains temps.

- d'une solution particulière de (E). L'équation différentielle étant **linéaire**, la solution particulière associée à un signal sinusoïdal de pulsation ω est un signal sinusoïdal de **même pulsation**.

$$u_{C_p}(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Ainsi :

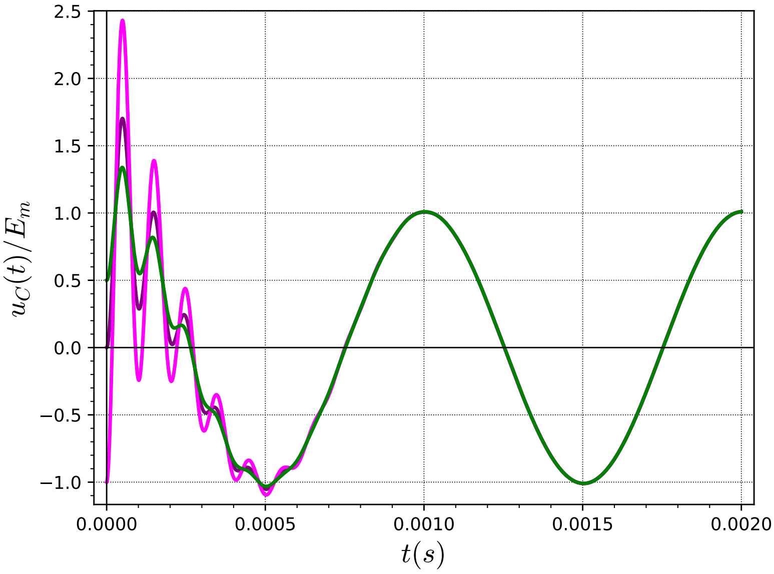
$$u_C(t) = u_{C_p} + u c_h(t)$$

$$u_C(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi) + \begin{cases} e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right) & \text{si } \Delta < 0 \quad \text{régime pseudo-périodique} \\ e^{-\omega_0 t}(At + B) & \text{si } \Delta = 0 \quad \text{régime critique} \\ Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \text{ avec } r_1 < 0 \text{ et } r_2 < 0 & \text{si } \Delta > 0 \quad \text{régime apériodique} \end{cases}$$

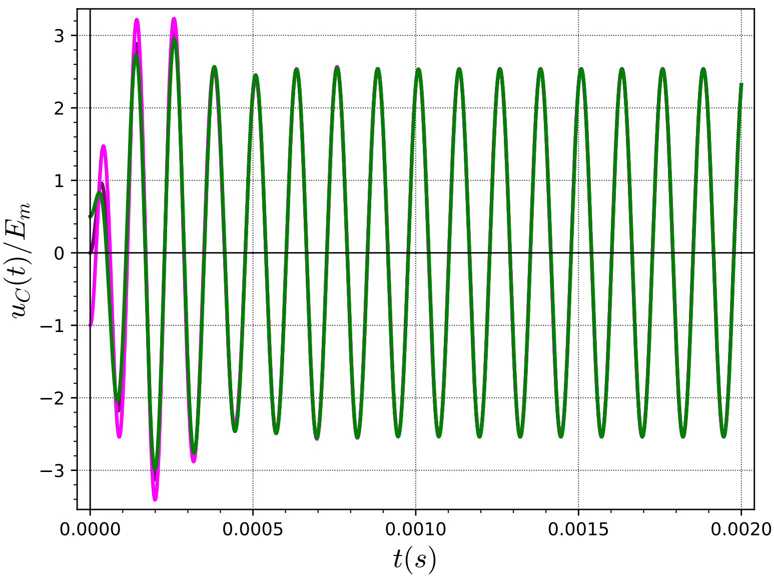
L'équation différentielle étant d'**ordre 2**, les constantes A et B dépendent des **deux conditions initiales** : $u_C(0)$ et $\dot{u}_C(0)$.

Tant que les deux solutions coexistent, on est dans le **régime transitoire**.
Lorsque la solution de l'équation homogène s'est éteinte, on a atteint le régime permanent. L'excitation étant sinusoïdale, on le nomme **régime sinusoïdal établi**. On dit aussi **régime sinusoïdal forcé** ou **régime sinusoïdal permanent** RSP. La solution du RSP est indépendante des conditions initiales qui n'influent que sur le régime transitoire (elles déterminent les valeurs des constantes A et B).

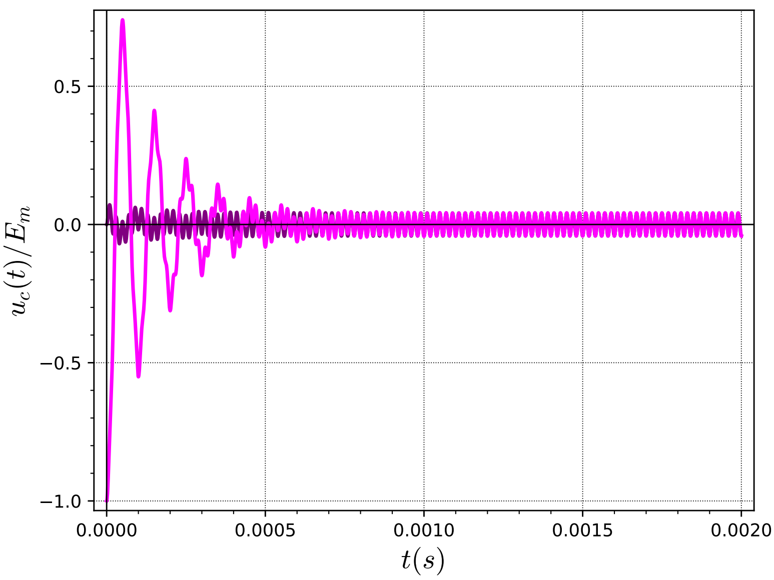
On suppose qu'on applique le signal $e(t) = E_m \cos\omega t$ depuis l'instant initial $t = 0$. On a tracé (à l'aide du logiciel SageMath) la réponse $u_C(t)/E_m$ pour différentes valeurs de la pulsation ω et différentes conditions initiales $[u_c(0), \dot{u}_C(0)]$. On s'est placé dans le cas où $Q = 5$ (régime transitoire pseudo-périodique) et $\omega_0 = 2\pi.10^4$ rad.s^{-1}



$\omega = \omega_0/10$



$\omega = 0,8\,\omega_0$



$\omega = 10\,\omega_0$

Commenter les courbes obtenues.

- On observe sur toutes les courbes un régime transitoire pseudo-périodique de même durée (environ 5.10^{-4} s).

  Vérification :

  On peut poser $e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} = e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0} = \dfrac{10}{2\pi 10^4} = \dfrac{10^{-3}}{2\pi}$ s.

  Au bout de 3τ l'amplitude du signal est inférieure à 5% de l'amplitude initiale.

  $$3\tau = 3\frac{10^{-3}}{2\pi}\text{ s} \simeq 3\frac{10^{-3}}{2\times 3}\text{ s} \simeq \frac{10^{-3}}{2} = 5.10^{-4}\text{ s}$$

  Ce qui est en accord avec ce qu'on observe.
- Lorsque le régime sinusoïdal permanent est atteint toutes les courbes se confondent, quelles que soient les condition initiales.
- On constate que, le régime sinusoïdal permanent atteint, le rapport U_m/E_m entre l'amplitude U_m de la tension u_c sur l'amplitude E_m du signal délivré par le GBF dépend de la fréquence :
  - Il vaut 1 pour $\omega = \omega_0/10$: à basse fréquence l'amplitude de u_c est égale à l'amplitude de l'excitation.
  - Il est supérieur à 1 (ici environ 2,5) pour une pulsation proche de ω_0 : l'amplitude de u_c est plus importante que l'amplitude de l'excitation $e(t)$.
  - À haute fréquence, l'amplitude de u_c beaucoup plus faible que l'amplitude de la tension excitatrice $e(t)$.

L'amplitude de la tension u_c observée en régime sinusoïdal permanent dépend de la fréquence du signal excitateur.

Il en est de même pour la phase φ.

II. Calcul de la solution du régime sinusoïdal permanent

On souhaite déterminer l'amplitude et la phase des oscillations observées. Pour cela, il nous faut calculer la solution $U_m\cos(\omega t+\varphi)$ du régime sinusoïdal permanent. La notation complexe va alors s'avérer très utile.
En électricité, pour éviter la confusion avec la notation de l'intensité i d'un courant, il est fréquent de noter $j^2=-1$ à la place de $i^2=-1$.

II.1. Notation complexe

Excitation (entrée)	$\rightarrow$	Réponse (sortie)
$E_m\cos\omega t$	$\rightarrow$	$U_m\cos(\omega t+\varphi)$
$E_m\sin\omega t$	$\rightarrow$	$U_m\sin(\omega t+\varphi)$
$E_m(\cos\omega t+j\sin\omega t)$	$\rightarrow$	$U_m(\cos(\omega t+\varphi)+j\sin(\omega t+\varphi))$
$E_me^{j\omega t}$	$\rightarrow$	$U_me^{j(\omega t+\varphi)}$

À toute grandeur sinusoïdale $u(t)=U_m\cos(\omega t+\varphi)$ on peut associer la grandeur complexe

$$\underline{u}=U_me^{j(\omega t+\varphi)}=\underline{U}_me^{j\omega t}$$

avec $\underline{u}_m=U_m\,e^{j\varphi}$ l'**amplitude complexe** du signal.
$u(t)=Re(\underline{u})$

Remarque :
– De même, on associe au signal $v(t)=V_m\sin(\omega t+\varphi)$ la valeur complexe $\underline{v}=V_me^{j(\omega t+\varphi)}$ avec $v(t)=Im(\underline{Y}(t))$.

- dérivation : $\dfrac{\mathrm{d}\underline{u}}{\mathrm{d}t}=U_m\,j\omega e^{j(\omega t+\varphi)}=j\omega\underline{u}$. Dériver revient à multiplier par $j\omega$.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\underline{u}}{\mathrm{d}t}=j\omega\underline{u}}$$

- intégration : $\int\underline{u}\mathrm{d}t=\frac{\underline{u}}{j\omega}$. Intégrer revient à diviser par $j\omega$.

$$\boxed{\int\underline{u}\mathrm{d}t=\frac{\underline{u}}{j\omega}}$$

II.2. Expression de $\underline{u}_C(t)$ en régime sinusoïdal établi.

On se place en régime sinusoïdal établi. On cherche la solution particulière de (E) :

$$\ddot{u}_C+\frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_C+\omega_0^2u_C=\omega_0^2E_m\cos\omega t$$

Elle est de la forme $u_C(t)=U_m\cos(\omega t+\varphi)$. La notation complexe va permettre de trouver aisément cette solution.

On passe en notation complexe :

- à $u_C(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ on associe $\underline{u}_c(t) = U_m e^{j(\omega t+\varphi)} = \underline{U}_m e^{j\omega t}$
- à $e(t) = E_m \cos \omega t$ on associe $\underline{e}(t) = E_m e^{j\omega t}$

$$\underline{\ddot{u}_C} + \frac{\omega_0}{Q}\underline{\dot{u}_C} + \omega_0^2 \underline{u}_C = \omega_0^2 E_m e^{j\omega t}$$

$$(j\omega)^2 \underline{u}_C + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{u}_C + \omega_0^2 \underline{u}_C = \omega_0^2 E_m e^{j\omega t}$$

$$\underline{u}_C \left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega + \omega_0^2\right) = \omega_0^2 E_m e^{j\omega t}$$

$$\underline{U}_m \cancel{e^{j\omega t}} \left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega + \omega_0^2\right) = \omega_0^2 E_m \cancel{e^{j\omega t}}$$

On obtient l'expression de l'amplitude complexe de la réponse en fonction de la pulsation ω :

$$\boxed{\underline{U}_m(\omega) = U_m e^{j\varphi} = \frac{\omega_0^2 E_m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega_0}{Q}\omega}}$$

Valeurs asymptotiques :

- $\omega \ll \omega_0 \quad (\omega \to 0)$

  $\underline{U}_m = U_m e^{j\varphi} \simeq E_m$

  d'où $U_m = E_m$ et $\varphi = 0$

  La tension aux bornes du condensateur a même amplitude et la même phase que la tension délivrée par le GBF.

- $\omega \gg \omega_0 \quad (\omega \to \infty)$

  $\underline{U}_m = U_m e^{j\varphi} \simeq -\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2} E_m$

  d'où $U_m = \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2} E_m \to 0$ pour $\omega \to \infty$.

  et $\varphi = \pi$

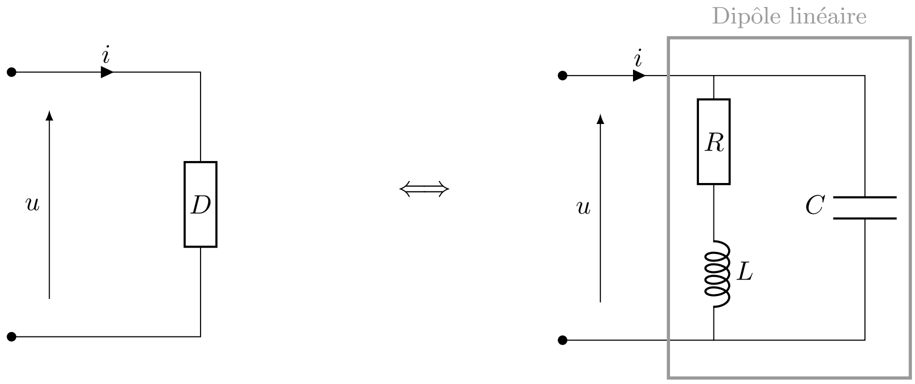
  La tension aux bornes du condensateur est de faible amplitude et en opposition de phase par rapport à celles délivrée par le GBF.

On va introduire dans le chapitre suivant la notion d'**impédance complexe**. Grâce à cet outil, il ne sera même plus nécessaire de passer par l'équation différentielle pour obtenir très rapidement $u_c(t)$ en régime sinusoïdal établi.

III. Impédance complexe d'un dipôle linéaire

III.1. Définition

Considérons un circuit constitué d'une association de dipôle linéaire de type résistor, bobine ou condensateur. On se place en régime sinusoïdal établi.



On peut montrer que la tension u et l'intensité i sont liés par une équation différentielle linéaire à coefficient constants, par exemple ici :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u = \frac{R}{LC}i + \frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

que l'on écrira sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + a\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + bu = \alpha i + \beta\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

En notation complexe :

$$(j\omega)^2\underline{u} + aj\omega\underline{u} + b\underline{u} = \alpha\underline{i} + \beta j\omega\underline{i}$$

$$\left(-\omega^2 + aj\omega + b\right)\underline{u} = (\alpha + j\omega)\,\underline{i}$$

$$\underline{u} = \left[\frac{\alpha + j\omega}{-\omega^2 + aj\omega + b}\right]\underline{i}$$

Les grandeurs complexes $\underline{u}$ et $\underline{i}$ sont reliés par une relation du type :

$$\boxed{\underline{u} = \underline{Z}\underline{i}}$$

$\underline{Z}$ est appelée **impédance complexe** du dipôle D.

En régime sinusoïdal permanent, la tension et l'intensité ont pour expression générale :

$$u(t) = U_m\cos(\omega t + \varphi_u) \longrightarrow \underline{u}(t) = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)} = \underline{U}_m e^{j\omega t} \quad \text{avec } \underline{U}_m = U_m e^{j\varphi_u}$$
$$i(t) = I_m\cos(\omega t + \varphi_i) \longrightarrow \underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \underline{I}_m e^{j\omega t} \quad \text{avec } \underline{I}_m = I_m e^{j\varphi_i}$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\underline{U}_m e^{j\omega t}}{\underline{I}_m e^{j\omega t}} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{U_m e^{j\varphi_u}}{I_m e^{j\varphi_i}} = \frac{U_m}{I_m}e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

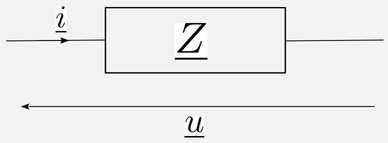
L'impédance complexe $\underline{Z}$ s'exprime sous la forme

$$\underline{Z} = |\underline{Z}|e^{j\varphi}$$

En identifiant les deux expressions on voit que

- ▷ $|\underline{Z}| = \dfrac{U_m}{I_m}$ et s'exprime donc en ohm (Ω)
- ▷ $\varphi = \arg(\underline{Z}) = \varphi_u - \varphi_i$

Impédance complexe



$$\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i} \quad \text{en convention récepteur}$$

Le module de l'impédance complexe est égal au rapport de l'amplitude de la tension sur l'amplitude de l'intensité.
L'argument φ de l'impédance complexe correspond au déphasage $\varphi_u - \varphi_i$ entre la tension et l'intensité.

- $|\underline{Z}| = \dfrac{U_m}{I_m}$ et s'exprime en ohm (Ω)
- $\varphi = \arg(\underline{Z}) = \varphi_u - \varphi_i$

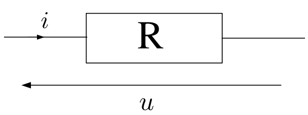
On peut définir de même, l'**admittance complexe** $\underline{Y}$ d'un dipôle par

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} \quad \text{en convention récepteur}$$

- $|\underline{Y}| = \dfrac{I_m}{U_m}$ et s'exprime donc en siemens ($\mathrm{S} = \Omega^{-1}$)
- $\arg(\underline{Y}) = -\arg(\underline{Z}) = -\varphi = \varphi_i - \varphi_u$

Si $\underline{Z} \in \mathbb{R}^+$ (ou si $\underline{Y} \in \mathbb{R}^+$) alors $\varphi = 0$: u et i sont en phase.

III.2. Cas d'une résistance



En convention récepteur :

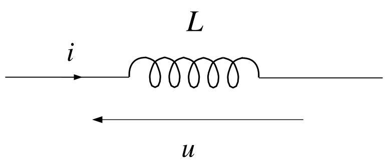
$$u = Ri$$

$$\underline{u} = R\underline{i} = \underline{Z}_R\underline{i}$$

$$\underline{Z}_R = R$$

Remarque : $R \in \mathbb{R}^+$ donc $\varphi = 0$. La tension u et l'intensité i sont en phase ($\varphi_u = \varphi_i$).

III.3. Cas d'une bobine



En convention récepteur :

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$\underline{u} = Lj\omega\underline{i} = jL\omega\underline{i} = \underline{Z}_L\underline{i}$$

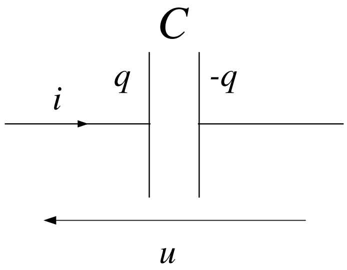
$$\underline{Z}_L = jL\omega$$

$\arg(jL\omega) = \dfrac{\pi}{2}$: la tension u est en quadrature de phase avant par rapport à l'intensité.

Comportement asymptotique :

Basse fréquence	**Haute fréquence**
$\omega \to 0$	$\omega \to \infty$
$\lvert jL\omega \rvert \to 0$	$\lvert jL\omega \rvert \to \infty$
	

III.4. Cas d'un condensateur



En convention récepteur :

$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$\underline{i} = Cj\omega\underline{u} = jC\omega\underline{u}$$

$$\underline{u} = \frac{1}{jC\omega}\underline{i} = \underline{Z}_C\underline{i}$$

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$$

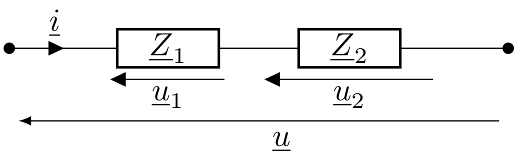
$\arg(\frac{1}{jC\omega}) = -\frac{\pi}{2}$: la tension u est en quadrature de phase retard par rapport à l'intensité.

Comportement asymptotique :

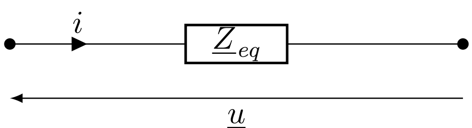
Basse fréquence	**Haute fréquence**
$\omega \to 0$	$\omega \to \infty$
$\left\lvert \frac{1}{jC\omega} \right\rvert \to \infty$	$\lvert \frac{1}{jC\omega} \rvert \to 0$
	

III.5. Association d'impédances complexes

a) Association série



$\Leftrightarrow$



D'après le schéma de gauche :

$$\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 = \underline{Z}_1\underline{i} + \underline{Z}_2\underline{i} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)\underline{i}$$

D'après le schéma de droite

$$\underline{u} = \underline{Z}_{eq}\underline{i}$$

Les deux relations étant équivalentes :

$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$

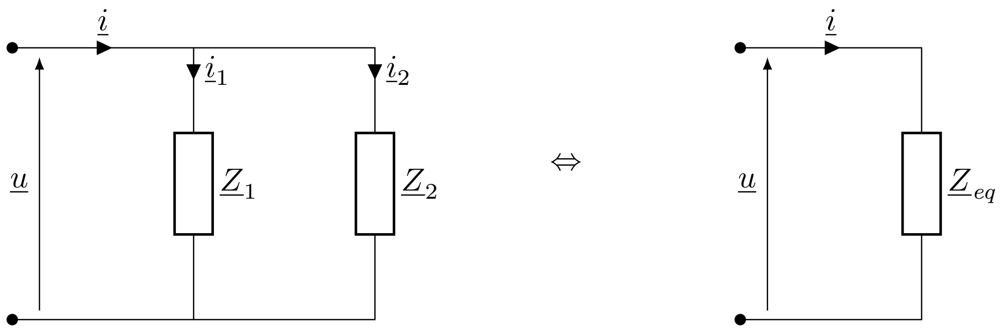
Association série d'impédances

$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$

Cette relation est généralisable à N impédances en série :

$$\underline{Z}_{eq} = \sum_{k=1}^{N} \underline{Z}_k.$$

b) Association parallèle



D'après la loi des nœuds :

$$\underline{i} = \underline{i}_1 + \underline{i}_2$$

D'après le schéma de gauche :

$$\underline{i}_1 = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}_1} \quad \text{et} \quad \underline{i}_2 = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}_2}$$

D'après le schéma de droite :

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}_{eq}}$$

D'où

$$\frac{\underline{u}}{\underline{Z}_{eq}} = \underline{u}\left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}\right)$$

Les deux relations étant équivalentes :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$$

Association parallèle d'impédances

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$$

$$\underline{Y}_{eq} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$$

Cette relation est généralisables à N impédances en parallèle :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\underline{Z}_k}.$$

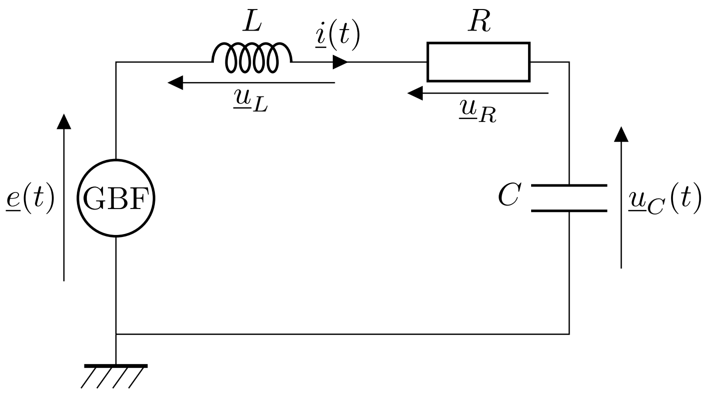
$$\underline{Y}_{eq} = \sum_{k=1}^{N} \underline{Y}_k.$$

III.6. Diviseur de tension, diviseur de courant

Les lois établies dans le cours EL1 avec des résistances restent applicables en régime sinusoïdal permanent avec des impédances complexes.

Exemple :

Exprimer la tension $\underline{u}_c$ aux bornes du condensateur et $\underline{u}_L$ aux bornes de la bobines.



On utilise la formule du diviseur de tension :

$$\underline{u}_C = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}}\,\underline{e} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}\,\underline{e}$$

$$\underline{u}_L = \frac{jL\omega}{R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}}\,\underline{e} = -\frac{LC\omega^2}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}\,\underline{e}$$

IV. Puissance en régime sinusoïdal permanent

IV.1. Rappel : valeur efficace d'un signal

Soit $s(t)$ un signal périodique de période T, sa valeur moyenne $< s(t) >$ est définie par

$$\boxed{< s(t) >= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\mathrm{d}t \quad \forall t_0}$$

Rappel :

$$< \cos(\omega t+\varphi) >= 0$$

$$< \sin(\omega t+\varphi) >= 0$$

La valeur moyenne d'un sinus (ou d'un cosinus) est nulle.

Soit $s(t)$ un signal périodique de période T, sa valeur efficace s_{eff} est définie par :

$$s_{\text{eff}} = \sqrt{< s^2(t) >} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t)\mathrm{d}t} \quad \forall t_0$$

s_{eff} a les même dimensions que $s(t)$.

Rappel :

$$< \cos^2(\omega t+\varphi) >= \tfrac{1}{2}$$

$$< \sin^2(\omega t+\varphi) >= \tfrac{1}{2}$$

La valeur moyenne d'un $\cos^2$ ou d'un $\sin^2$ est égale à $\frac{1}{2}$.

On peut alors calculer la valeur efficace d'un signal sinusoïdal $s(t) = s_m\cos(\omega t+\varphi)$:

$$s_{\text{eff}}^2 =< s^2(t) >= s_m^2 < \cos^2(\omega t+\varphi) >= \frac{s_m^2}{2}$$

$$s_{\text{eff}} = \frac{s_m}{\sqrt{2}}$$

La valeur efficace d'un signal sinusoïdal est égale à son amplitude divisée par $\sqrt{2}$.

$$s_{\text{eff}} = \frac{s_m}{\sqrt{2}}$$

IV.2. Puissance instantanée

En **convention récepteur**, La puissance électrique instantanée **reçue** par un dipôle vaut

$$P(t) = u(t)i(t)$$

On considère un dipôle caractérisé par son impédance complexe $\underline{Z}$. La partie réelle d'un produit n'étant pas égale au produit des parties réelles,

$$\mathrm{Re}(\underline{u}\,\underline{i}) \neq \mathrm{Re}(\underline{u})\mathrm{Re}(\underline{i})$$

on ne peut pas utiliser la notation complexe pour exprimer la puissance instantanée.

En régime sinusoïdal, $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$ et $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$ avec $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ et $U_m = |\underline{Z}| I_m$. On a :

$$\boxed{P(t) = U_m I_m \cos(\omega t + \varphi_u)\cos(\omega t + \varphi_i)}$$

IV.3. Puissance moyenne - Facteur de puissance

$$\langle P(t)\rangle = U_m I_m \langle \cos(\omega t + \varphi_u)\cos(\omega t + \varphi_i)\rangle$$

On utilise la relation trigonométrique : $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$:

$$\langle P(t)\rangle = \frac{U_m I_m}{2} \langle \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + \cos(\underbrace{\varphi_u - \varphi_i}_{=\varphi})\rangle$$

$$\langle P(t)\rangle = \frac{U_m I_m}{2} \left(\underbrace{\langle \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)\rangle}_{=0} + \cos(\varphi) \right)$$

$$\boxed{\langle P(t)\rangle = \frac{U_m I_m}{2}\cos(\varphi)}$$

que l'on peut exprimer en fonction des valeurs efficaces $U_{eff} = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}}$ et $I_{eff} = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$:

$$\langle P(t)\rangle = \frac{\sqrt{2}U_{eff}\sqrt{2}I_{eff}}{2}\cos(\varphi)$$

$$\boxed{\langle P(t)\rangle = U_{eff} I_{eff} \cos(\varphi)}$$

Or $U_{eff} = |\underline{Z}| I_{eff}$. On peut donc écrire de manière équivalente :

$$\boxed{\langle P(t)\rangle = |\underline{Z}| I_{eff}^2 \cos(\varphi) = \frac{U_{eff}^2}{|\underline{Z}|}\cos(\varphi)}$$

La **puissance moyenne** reçue par un dipôle d'impédance $\underline{Z} = |\underline{Z}|e^{j\varphi}$ a pour expression

$$\mathcal{P}_m = U_{eff} I_{eff} \cos\varphi = |\underline{Z}| I_{eff}^2 \cos(\varphi) = \frac{U_{eff}^2}{|\underline{Z}|}\cos(\varphi)$$

avec

— $U_{eff} = U_m/\sqrt{2}$ la valeur efficace de la tension aux bornes du dipôle

— $I_{eff} = I_m/\sqrt{2}$ la valeur efficace de l'intensité du courant qui traverse le dipôle

— $\cos\varphi$ est appelé facteur de puissance

$$\varphi = \arg(\underline{Z}) = \varphi_u - \varphi_i \quad \text{et} \quad U_{eff} = |\underline{Z}| I_{eff}$$

IV.4. Autre expression utile de la puissance moyenne

On peut écrire :

$$\underline{Z} = R + jX = |\underline{Z}|e^{j\varphi} = |\underline{Z}|(\cos\varphi + j\sin\varphi) = |\underline{Z}|\cos\varphi + j|\underline{Z}|\sin\varphi$$

En égalant les parties réelles : $R + jX = |\underline{Z}|\cos\varphi + j|\underline{Z}|\sin\varphi$ on obtient

$$R = |\underline{Z}|\cos\varphi$$

Cette dernière relation peut aussi être obtenue graphiquement en plaçant $\underline{Z}$ dans le plan complexe.

$$\mathcal{P}_m = |\underline{Z}| I_{eff}^2 \cos(\varphi) = \underbrace{|\underline{Z}|\cos(\varphi)}_{=R} I_{eff}^2$$

$$\mathcal{P}_m = R I_{eff}^2$$

La **puissance moyenne** reçue par un dipôle d'impédance $\underline{Z} = R + jX$ s'exprime sous la forme

$$\mathcal{P}_m = R I_{eff}^2$$

IV.5. Exemples des dipôles R, L et C

a) Résistance

$R \in \mathbb{R}^+$, $\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$, $\mathcal{P}_m = \dfrac{U_{eff}^2}{R} = R I_{eff}^2$.

On peut aussi faire directement le calcul :

Puissance instantanée reçue :

$$\mathcal{P} = u(t)i(t) = Ri(t)^2$$

Puissance moyenne reçue :

$$\mathcal{P}_m = \langle \mathcal{P} \rangle = R\langle i(t)^2 \rangle$$

$$\mathcal{P}_m = R I_{eff}^2 = \frac{U_{eff}^2}{R}$$

L'intensité efficace I_{eff} est égale à l'intensité d'un courant stationnaire qui dissiperait la même puissance dans la résistance.
L'énergie électrique reçue est dissipée par effet Joule sous forme d'énergie thermique.

b) Bobine

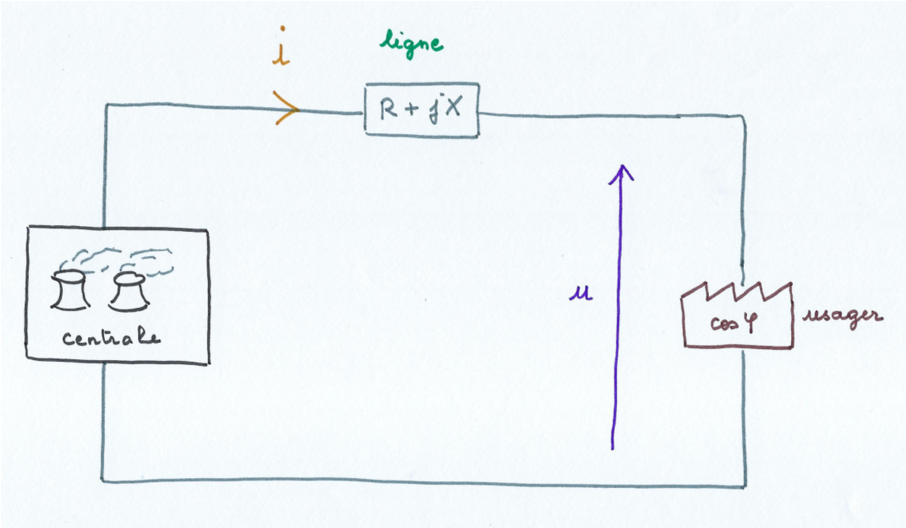
L'impédance de la bobine est imaginaire pure : la puissance moyenne reçue est nulle.
On vérifie : $\varphi = \arg(jL\omega) = \dfrac{\pi}{2}$; $\cos\varphi = 0$; $\mathcal{P}_m = 0$.
En moyenne sur une période la bobine reçoit autant d'énergie qu'elle en cède.

c) Condensateur

L'impédance du condensateur est imaginaire pure : la puissance moyenne reçue est nulle.
On vérifie : $\varphi = \arg\left(\dfrac{1}{jC\omega}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$; $\cos\varphi = 0$; $\mathcal{P}_m = 0$
En moyenne sur une période le condensateur reçoit autant d'énergie qu'il en cède.

IV.6. Transport d'énergie électrique

On note $R+jX$ l'impédance de la ligne. L'installation de l'usager possède un facteur de puissance $\cos\varphi$.



On définit :

- $\mathcal{P}_g$ puissance moyenne fournie par le générateur
- $\mathcal{P}_c$ puissance moyenne consommée par l'usager (et facturée)
- $\mathcal{P}_\ell$ puissance moyenne consommée par la ligne ("pertes en ligne")

On cherche à minimiser les pertes en lignes. On note I_{eff} l'intensité efficace du courant circulant dans la ligne et U_{eff} la tension aux borne de l'installation.

$$\mathcal{P}_\ell = RI_{eff}^2$$

$$\mathcal{P}_c = U_{eff} I_{eff} \cos\varphi$$

On voir qu'à $\mathcal{P}_c$ donné, on minimisera I_{eff}, donc les pertes en lignes, en augmentant U_{eff} et $\cos\varphi$.

$$\boxed{\mathcal{P}_\ell = R\,\frac{\mathcal{P}_c^2}{U_{eff}^2 \cos^2\varphi}}$$

La puissance consommée étant donnée, on diminuera les pertes en lignes :

- en diminuant R : les câbles doivent être de faible résistance. On utilise du cuivre.
- **en augmentant** U_{eff} : le transport de l'électricité se fait sur des lignes haute tension (380 kV, 640 kV). Des ***transformateurs*** permettent d'obtenir une tension efficace de 220 V à l'arrivée chez l'usager (voir cours d'électromagnétisme sur l'induction).
- **en augmentant le facteur de puissance cos** φ : E.D.F. exige que les installations électriques raccordées au réseau possèdent un facteur de puissance tel que

$$\cos\varphi > 0,93$$

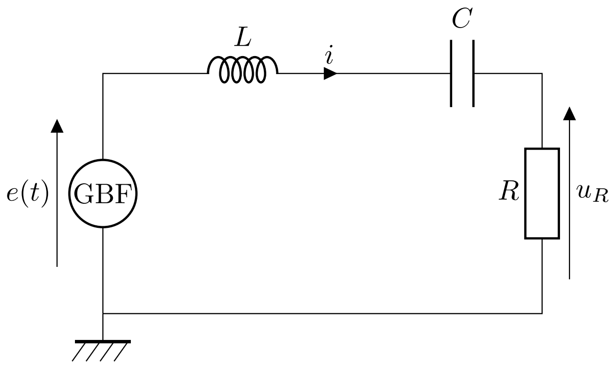
Ce sont surtout les installations industrielles qui sont concernées. Les moteurs électriques qu'elles utilisent possèdent un fort caractère inductif ($\varphi \simeq \frac{\pi}{2}$).

On verra en TD comment augmenter le $\cos\varphi$ d'une installation en plaçant des capacités en parallèle.

V. Circuit RLC série en régime sinusoïdal établi

V.1. Réponse en tension aux bornes de R

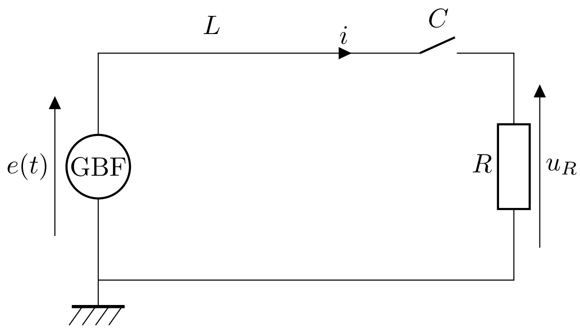
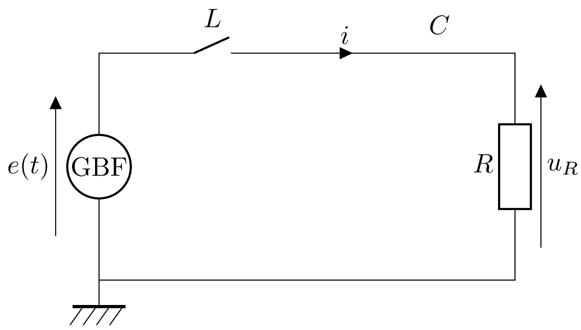
On considère un circuit RLC série alimenté par une tension sinusoïdale. On se place en régime sinusoïdal permanent.



$$e(t) = E_m \cos(\omega t) \qquad \longrightarrow \qquad \underline{e}(t) = E_m e^{j\omega t}$$

$$u_R(t) = U_{R_m} \cos(\omega t + \varphi) \quad \longrightarrow \quad \underline{u}_R(t) = U_{R_m} e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{U}_{R_m} e^{j\omega t} \quad \text{avec } \underline{U}_{R_m} = U_{R_m} e^{j\varphi}$$

Comportement asymptotique du circuit :

Basse fréquence	**Haute fréquence**
$\omega \to 0$	$\omega \to \infty$
	
$i = 0\,; \quad u_R = Ri = 0$	$i = 0\,; \quad u_R = Ri = 0$

Diviseur de tension :

$$\underline{u}_R = \frac{R}{R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}}\underline{e} = \frac{R}{R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)}\underline{e}$$

$$\underline{u}_R = \frac{1}{1 + j\left(\dfrac{L\omega}{R} - \dfrac{1}{RC\omega}\right)}\underline{e} = \frac{1}{1 + j\left(\dfrac{L\omega_0\omega}{R\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{RC\omega_0\omega}\right)}\underline{e}$$

On a posé, pour le circuit RLC série : $\begin{cases} \omega_0^2 = \dfrac{1}{LC} \\ Q = \dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{L\omega_0^2}{R\omega_0} = \dfrac{1}{RC\omega_0} \end{cases}$

$$\underline{u}_R = \frac{1}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}\underline{e}$$

$$\boxed{\underline{u}_R = \frac{1}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}\underline{e}}$$

On pose $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite. x est sans dimension.

$$\underline{u}_R = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}\underline{e}$$

$$\underline{U}_{R_m} e^{j\omega t} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}\underline{E}_m e^{j\omega t}$$

$$\underline{U}_{R_m} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}\underline{E}_m$$

$$U_{R_m} e^{j\varphi} = \frac{E_m}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$$

On en déduit en égalant module et argument :

$$\begin{cases} U_{R_m}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2}} E_m \\[2ex] \varphi(x) = \underbrace{\arg(E_m)}_{=0} - \arg\left((1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)\right) = -\arg\left(1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)\right) \end{cases}$$

V.2. Étude de la résonance

On s'intéresse à la réponse en amplitude $U_{R_m}(x)$. On a établi la relation :

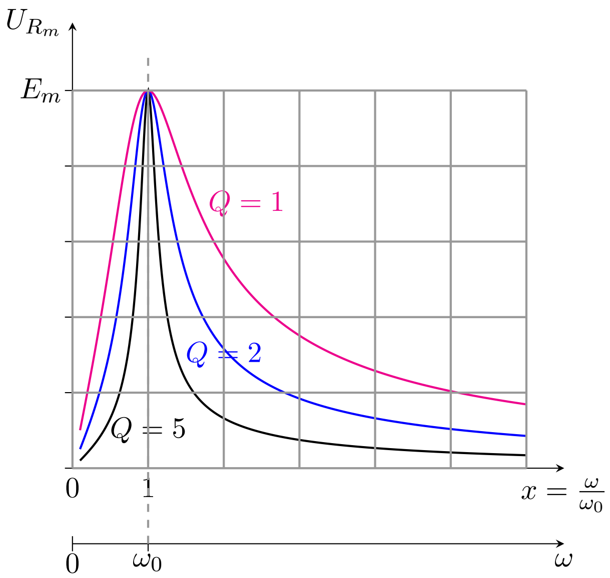
$$U_{R_m}(x) = \frac{E_m}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2}}$$

On retrouve le fait qu'à très basse fréquence et qu'à très haute fréquence la tension aux bornes de R tend vers 0.

> La tension aux bornes de la résistance R admet une **résonance** s'il existe une pulsation non nulle pour laquelle U_{R_m} admet un maximum.

Le numérateur étant constant, U_{Rm} admet un maximum lorsque $1+Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2$ admet un minimum soit pour $\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 = 0$ donc pour $x = 1$ et pour $\omega = \omega_0$.

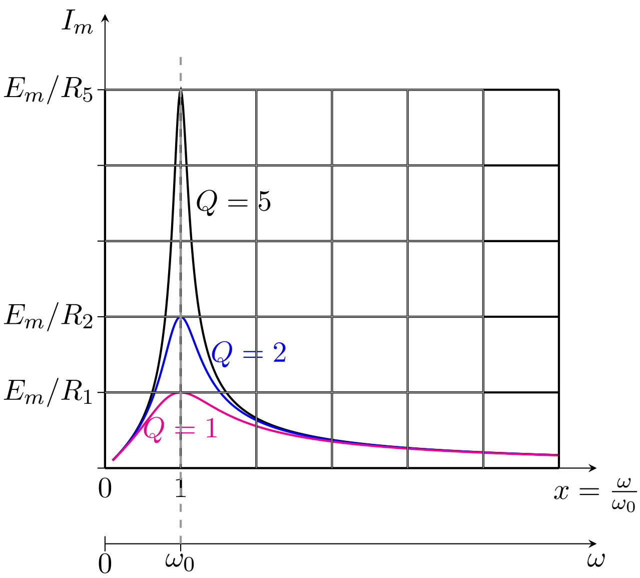
$$(U_{R_m})_{\max} = E_m$$



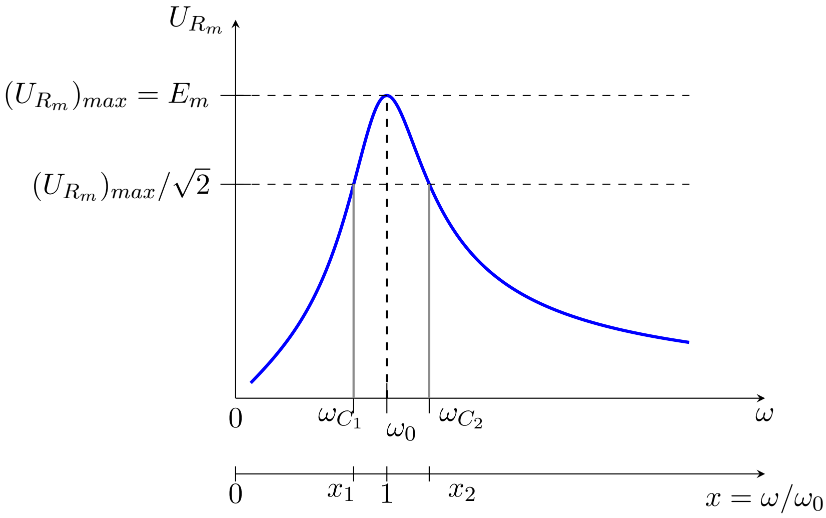
Quel que soit le facteur de qualité, la résonance en tension aux bornes de la résistance se produit pour $x = 1$ donc pour $\omega = \omega_0$.
La résonance est d'autant plus aiguë que le facteur de qualité est élevé, donc que la résistance est faible.

Puisque $i = u_R/R$, l'intensité admet un maximum lorsque la tension aux bornes de R admet un maximum. La résonance en tension aux bornes de R coïncide avec un maximum en intensité. À ω_0 donné (L et C donnés), $Q = \frac{L\omega_0}{R} \nearrow$ quand $R \searrow$.

$$(I_m)_{\max} = \frac{E_m}{R}$$



On peut caractériser l'acuité de la résonance en définissant la bande passante



Bande passante :
On définit la bande passante comme le domaine de pulsation $[\omega_{C1}, \omega_{C2}]$ où l'amplitude de la tension vérifie :

$$\frac{(U_{R_m})_{max}}{\sqrt{2}} \leqslant U_{R_m} \leqslant (U_{R_m})_{max}$$

ω_{C1} et ω_{C2} sont appelées pulsations de coupure.
Plus le facteur de qualité est élevé, plus la bande passante est étroite.

Détermination des pulsations de coupures :
On cherche les valeurs de x telles que

$$\frac{E_m}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 2$$

$$Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1$$

$$Q\left(x - \frac{1}{x}\right) = \pm 1$$

- 1$^{\text{er}}$ cas : $Q\left(x - \frac{1}{x}\right) = 1$

$$x^2 - \frac{x}{Q} - 1 = 0$$

On ne conserve que la racine positive : $x_a = \dfrac{1}{2Q} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{Q^2} + 4}$

- $2^{\text{ème}}$ cas : $Q\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=-1$

$$x^2+\frac{x}{Q}-1=0$$

On ne conserve que la racine positive : $x_b=-\dfrac{1}{2Q}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{Q^2}+4}$

$x_1=\min[x_a,x_b]=x_b$

$x_2=\max[x_a,x_b]=x_a$

$$x_2-x_1=x_a-x_b=\frac{1}{Q}$$

$$\frac{\omega_{C_2}}{\omega_0}-\frac{\omega_{C_1}}{\omega_0}=\frac{1}{Q}$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0}=\frac{1}{Q}$$

La largeur de la bande passante est d'autant plus faible que le facteur de qualité est élevé.

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0}=\frac{\omega_{C_2}-\omega_{C_1}}{\omega_0}=\frac{1}{Q}$$

Notions et contenus	Capacités exigibles
14. Circuits linéaires en régime sinusoïdal établi	
Signal sinusoïdal. Amplitude, phase. Représentation complexe d'un signal sinusoïdal	Passer de la représentation complexe d'un signal au signal réel et réciproquement (convention $e^{j\omega t}$).
Impédances complexes, association de deux impédances Impédance complexe d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine. Puissance moyenne reçue par un dipôle linéaire en régime sinusoïdal établi. Tension efficace. Intensité efficace. Facteur de puissance	Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente. Établir l'expression de l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine. Établir et exploiter l'expression de la puissance moyenne reçue par un dipôle en fonction de la tension efficace et du facteur de puissance. Relier le facteur de puissance à l'impédance complexe.
Transport d'énergie électrique	Justifier l'emploi de lignes à hautes tensions pour le transport d'énergie électrique. Analyser l'influence du facteur de puissance d'une installation sur les pertes d'énergie par effet Joule dans les lignes de transport.
Circuit RLC série en régime sinusoïdal établi. Résonance de courant. Facteur de qualité.	Établir l'expression de l'amplitude de la tension aux bornes de la résistance, de la bobine ou du condensateur en fonction de la fréquence en utilisant la notion d'impédance complexe. Tracer la courbe donnant l'amplitude de la tension aux bornes de la résistance en fonction de la fréquence. Relier l'amplitude et la largeur (à $1/\sqrt{2}$) du pic de résonance en courant au facteur de qualité et à la pulsation propre du circuit.