EL2 - Circuits linéaires en régime transitoire

Table des matières

I. Charge et décharge d'un condensateur dans un circuit RC série 3
I.1. Charge d'un condensateur . . . 3
a) Analyse . . . 3
b) Mise en équation . . . 3
I.2. Résolution . . . 4
I.3. Décharge du condensateur . . . 6
a) Mise en équation . . . 6
I.4. Résolution . . . 6
I.5. Bilan énergétique . . . 8
a) Bilan énergétique de la charge . . . 8
b) Bilan énergétique de la décharge . . . 9

II. Établissement et rupture du courant dans un circuit RL série 10
II.1. Établissement du courant . . . 10
a) Analyse . . . 10
b) Mise en équation pour u_R . . . 11
c) Résolution . . . 11
d) Réponse en tension aux bornes de la bobine. . . . 13
II.2. Extinction du courant . . . 13
a) Mise en équation pour u_R . . . 13
b) Résolution . . . 14
II.3. Bilan énergétique . . . 14
a) Établissement du courant . . . 14
b) Extinction du courant . . . 15

III. Circuit RLC série en régime transitoire 16
III.1. Mise en équation de la charge du condensateur . . . 16
III.2. Les différents régimes . . . 17
a) Cas $\Delta < 0$ (résistance faible) . . . 17
b) Cas $\Delta = 0$ (résistance critique) . . . 19
c) Cas $\Delta > 0$ (amortissement important) . . . 20
III.3. Analogie mécanique . . . 22

Grâce aux "supercondensateurs" la recharge d'un bus ne prend que quelques minutes.

Pour en savoir plus sur les "supercondensateurs" :

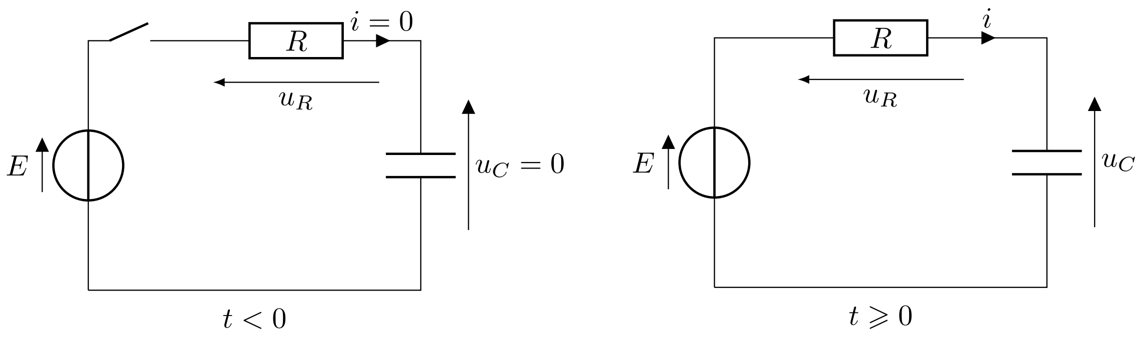
Jean-Michel Courty et Édouard Kierlik, *Charges en stock*, Pour la science n°439 - Mai 2014 - p86-88

I. Charge et décharge d'un condensateur dans un circuit RC série

I.1. Charge d'un condensateur

a) Analyse

On considère un circuit RC série relié à une source de tension idéale de f.é.m. E.
À $t = 0$ on ferme l'interrupteur, le condensateur n'étant pas chargé.



Analyser l'évolution de la tension u_c aux bornes du condensateur.

b) Mise en équation

D'après la loi des mailles :

$E - u_R - u_C = 0$

$E = u_R + u_C$

Or $u_R = Ri$ avec $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ (R et C sont en convention récepteur). D'où

$E = RC\dot{u}_C + u_C$

que l'on écrit sous la forme :

$$\boxed{\dot{u}_C + \frac{1}{RC}u_C = \frac{1}{RC}E}$$

On obtient une équation différentielle du premier ordre linéaire à coefficient constant, qu'on exprime sous forme canonique :

$$\boxed{\dot{u}_C + \frac{1}{\tau}u_C = \frac{1}{\tau}E \quad \textbf{avec } \tau = RC} \tag{E}$$

I.2. Résolution

On obtient une équation différentielle du premier ordre linéaire à coefficient constant, à second membre constant.
On lui associe l'équation sans second membre (équation homogène) :

$$\dot{u}_C + \frac{1}{\tau}u_C = 0 \tag{E0}$$

La solution générale de (E) est la superposition

- d'une solution particulière de l'équation avec second membre (E). Le second membre étant constant on cherche une solution particulière constante $i_p = K$ telle que

$$0 + \frac{1}{\tau}K = \frac{E}{\tau}$$

$$K = E$$

ainsi $u_{C_p} = E$

- de la solution générale de l'équation homogène (E0)

$$\dot{u}_C = -\frac{1}{\tau}u_C$$

$$u_{C_h}(t) = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$$

ainsi :

$$u_c(t) = u_p + u_{C_h}(t) = E + \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$$

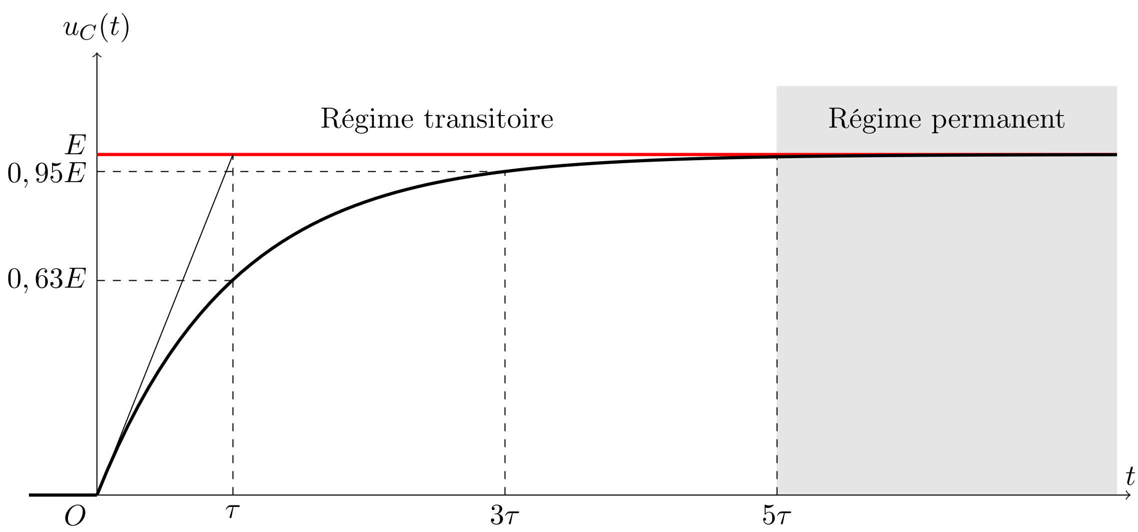
La constante λ se détermine à l'aide de la condition initiale.

La tension aux bornes du condensateur étant continue :

$$u(0^-) = u(0^+) = u(0).$$

On en déduit $u(0) = E + \lambda = 0$ d'où $\lambda = -E$.

$$\boxed{u_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad \text{avec } \tau = RC}$$



Quelques calculs utiles :

$$\boxed{u_C(\tau) = E(1-e^{-1}) = 0,63E}$$
$$u_C(2\tau) = E(1-e^{-2}) = 0,86E$$
$$u_C(3\tau) = E(1-e^{-3}) = 0,95E$$

On peut calculer le temps à partir duquel l'écart relatif entre u_C et la valeur asymptotique E est inférieur à 1 % :

$$\frac{E-u_C(t)}{E} < 10^{-2}$$
$$e^{-\frac{t}{\tau}} < 10^{-2}$$
$$t > 2\tau \ln 10$$
$$t > 4,6\tau$$

Pour $t > 5\tau$ on pourra considérer le régime permanent atteint.

Tangente à l'origine

Calculons la dérivée $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -E\left(-\dfrac{1}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} = \dfrac{E}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$.

La pente de la tangente à la courbe à l'origine vaut donc $\left(\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_{(t=0)} = \dfrac{E}{\tau}$

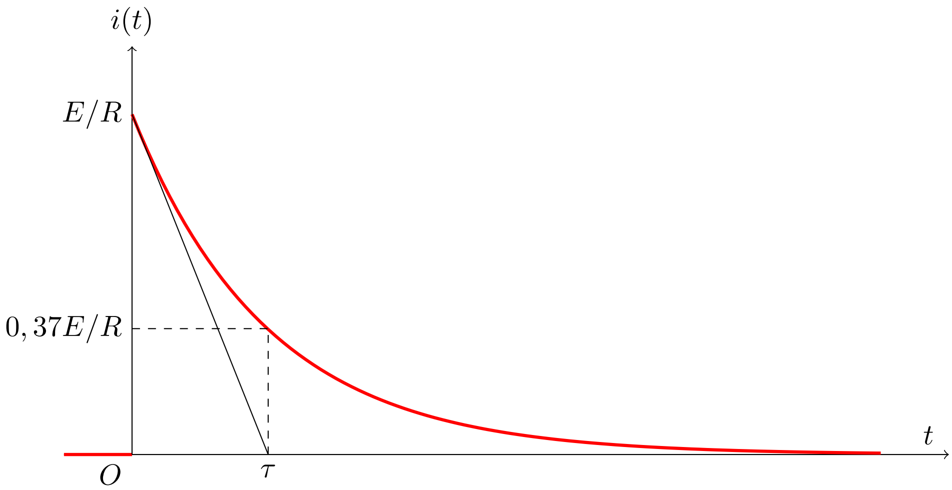
La tangente à l'origine a pour équation $y = \frac{E}{\tau}t$.

Elle coupe l'asymptote $y = E$ pour $t = \tau$.

La tangente à l'origine (en $t = 0$) coupe l'asymptote pour $t = \tau$.

Réponse en intensité :

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{CE}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{car } \tau = RC$$



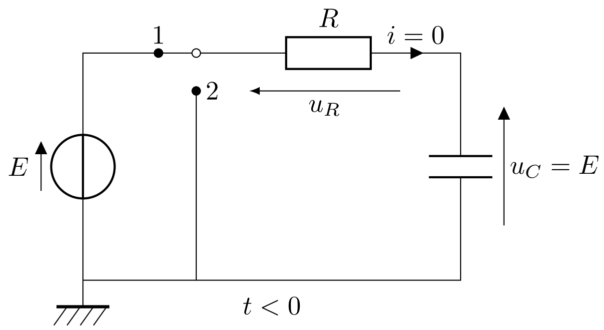
L'intensité est discontinue à $t = 0$.

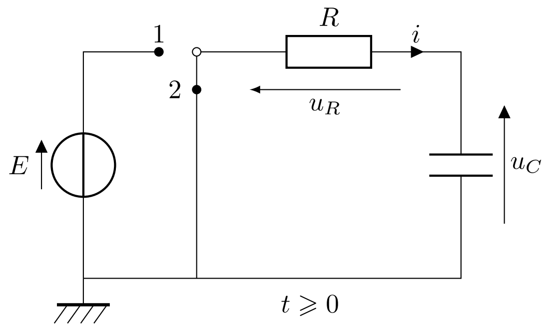
À $t = 0^+$, $E = Ri(0^+) + u_C(0^+) = Ri(0^+)$ car $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur. D'où $i(0^+) = \frac{E}{R}$.

Quand le régime permanent stationnaire est atteint, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert : l'intensité s'annule.

I.3. Décharge du condensateur

On suppose le régime permanent stationnaire atteint : le condensateur est chargé, la tension à ses bornes vaut E et l'intensité du courant est nulle.
À $t = 0$ on bascule l'interrupteur de la position 1 à la position 2.





a) Mise en équation

D'après la loi des mailles :

$$u_R + u_C = 0$$

Or $u_R = Ri$ avec $i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ (R et C sont en convention récepteur). D'où

$$RC\dot{u}_C + u_C = 0$$

que l'on écrit sous la forme :

$$\boxed{\dot{u}_C + \frac{1}{RC}u_C = 0}$$

On obtient une équation différentielle du premier ordre linéaire à coefficient constant, homogène, qu'on exprime sous forme canonique :

$$\boxed{\dot{u}_C + \frac{1}{\tau}u_C = 0 \quad \text{avec } \tau = RC} \tag{E0}$$

I.4. Résolution

La solution générale de l'équation homogène (E0) est telle que

$$\dot{u}_C = -\frac{1}{\tau}u_C$$

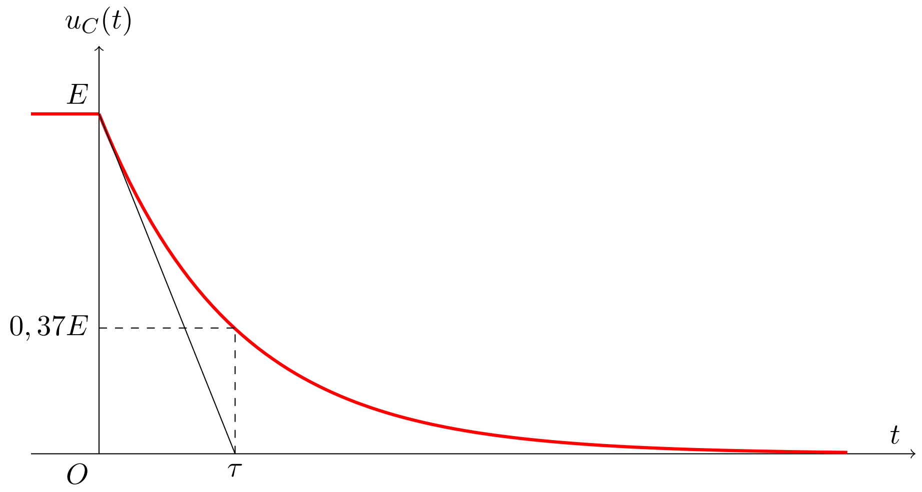
$$u_C(t) = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$$

La constante λ se détermine à l'aide de la condition initiale :
La tension aux bornes du condensateur étant continue

$$u(0^-) = u(0^+) = u(0) = E$$

On en déduit $u(0) = \lambda = E$

$$\boxed{u_C(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec } \tau = RC}$$



I.5. Bilan énergétique

a) Bilan énergétique de la charge

La loi des mailles a permis d'établir la relation

$$E = Ri + u_C$$

Chaque terme est homogène à une tension. Pour faire apparaître un puissance il suffit de multiplier charge membre de l'égalité par i .

$$Ei = Ri^2 + u_C\, i \quad \text{avec } i = C\dot{u}_C$$

$$Ei = Ri^2 + u_C\, C\dot{u}_C$$

$$Ei = Ri^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)$$

- Ei : puissance électrique fournie par le générateur
- Ri^2 : puissance électrique reçue par la résistance et dissipée par effet Joule
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)$: puissance électrique reçue par le condensateur.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right) = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_e}{\mathrm{d}t} \quad \text{avec } \mathcal{E}_e = \frac{1}{2}Cu_C^2 \text{ l'énergie stockée dans le condensateur}$$

- énergie totale stockée dans le condensateur

$$E_e = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}Cu_C^2\right]_0^\infty = \frac{1}{2}Cu_{C_\infty}^2 - \frac{1}{2}Cu_C^2(0)$$

$$E_e = \frac{1}{2}CE^2$$

- énergie totale fournie par le générateur

$$E_g = \int_0^\infty Ei\mathrm{d}t = E\int_0^\infty C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = CE\left[u_C\right]_0^\infty$$

$$E_g = CE^2$$

- On en déduit l'énergie totale dissipée par effet joule

$$E_J = \int_0^\infty Ri^2\mathrm{d}t = \int_0^\infty Ei\mathrm{d}t - \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)\mathrm{d}t = CE^2 - \frac{1}{2}CE^2$$

$$E_J = \frac{1}{2}CE^2$$

L'énergie fournie par le générateur est pour moitié stockée dans le condensateur et pour moitié dissipée par effet Joule dans la résistance.

b) Bilan énergétique de la décharge

La loi des mailles a permis d'établir la relation :

$$0 = Ri + u_C$$

$$Ri^2 + u_C\, i = 0$$

$$Ri^2 = -u_c C \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

$$Ri^2 = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)$$

$$E_J = \int_0^{\infty} Ri^2 \mathrm{d}t = -\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)\mathrm{d}t$$

$$E_J = \left[-\frac{1}{2}Cu_C^2\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{2}C\underbrace{u_{C_\infty}^2}_{=0} + \frac{1}{2}C\underbrace{u_C^2(0)}_{=E^2} = \frac{1}{2}CE^2$$

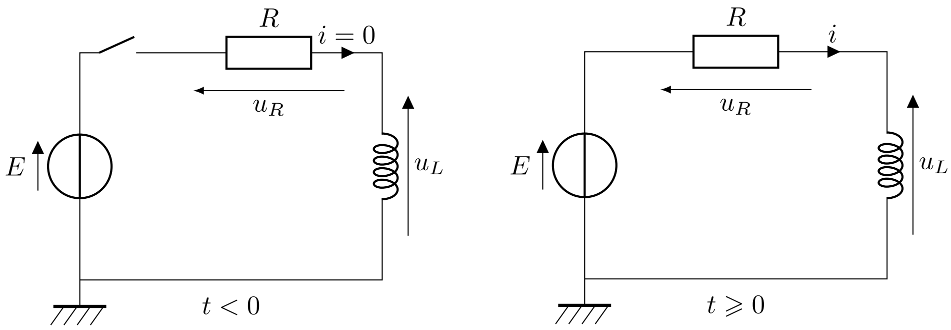
L'énergie initialement stockée dans le condensateur est intégralement dissipée par effet Joule dans la résistance.

II. Établissement et rupture du courant dans un circuit RL série

II.1. Établissement du courant

a) Analyse

On considère un circuit RL série relié à une source de tension idéale de f.é.m. E.
À $t = 0$ on ferme l'interrupteur.



Analyser l'évolution de l'intensité i du courant après la fermeture de l'interrupteur.

Aux bornes de quel dipôle doit-on brancher un oscilloscope si on souhaite visualiser l'évolution de l'intensité ?

b) Mise en équation pour u_R

D'après la loi des mailles :

$E - u_R - u_L = 0$

$E = u_R + u_L$

avec, R et L étant tous deux en convention récepteur :

- $u_R = Ri$, soit $i = \dfrac{u_R}{R}$
- $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{u_R}{R}\right) = \dfrac{L}{R}\dfrac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t}$

d'où

$E = u_R + \dfrac{L}{R}\dfrac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t}$

que l'on écrit sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}u_R = \frac{R}{L}E$$

La grandeur $\dfrac{R}{L}$ étant homogène à l'inverse d'un temps, on pose $\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{R}{L}$ avec τ homogène à un temps.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_R = \frac{1}{\tau}E \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R}} \tag{E}$$

c) Résolution

On obtient une équation différentielle du premier ordre linéaire à coefficient constant, à second membre constant.
On lui associe l'équation sans second membre (équation homogène) :

$$\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_R = 0 \tag{E0}$$

La solution générale de (E) est la superposition

- d'une solution particulière de l'équation avec second membre (E). Le second membre étant constant on cherche une solution particulière constante $i_p = K$ telle que

$$0 + \frac{1}{\tau}K = \frac{1}{\tau}E$$

$$K = E$$

  ainsi $u_{R_p} = E$.
- de la solution générale de l'équation homogène (E0)

$$\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau}u_R$$

$$u_{R_h}(t) = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R}$$

ainsi :

$$u_R(t) = u_p + u_{R_h}(t) = E + \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$$

La constante λ se détermine à l'aide de la condition initiale.

L'intensité du courant circulant à travers une bobine étant continue on a :

$$\boxed{i(0^-) = i(0^+) = i(0) = 0}$$

D'où, en multipliant par R

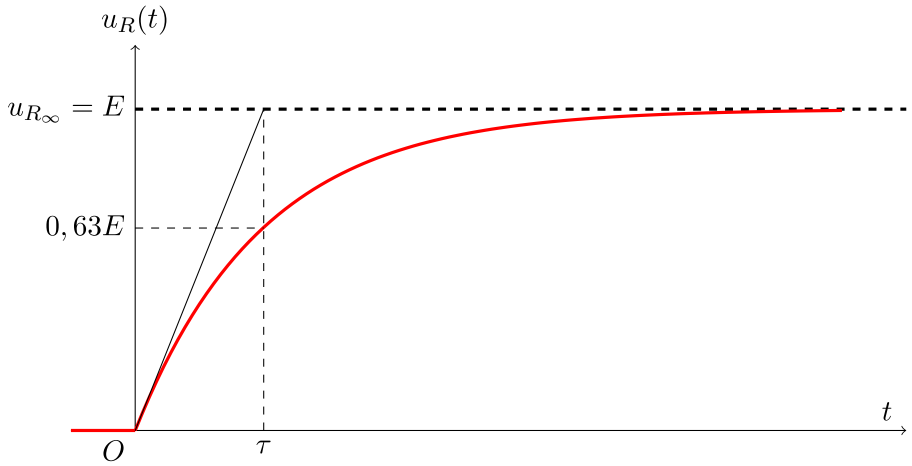
$$Ri(0^-) = Ri(0^+) = Ri(0) = 0.$$

$$\boxed{u_R(0^-) = u_R(0^+) = u(0) = 0}$$

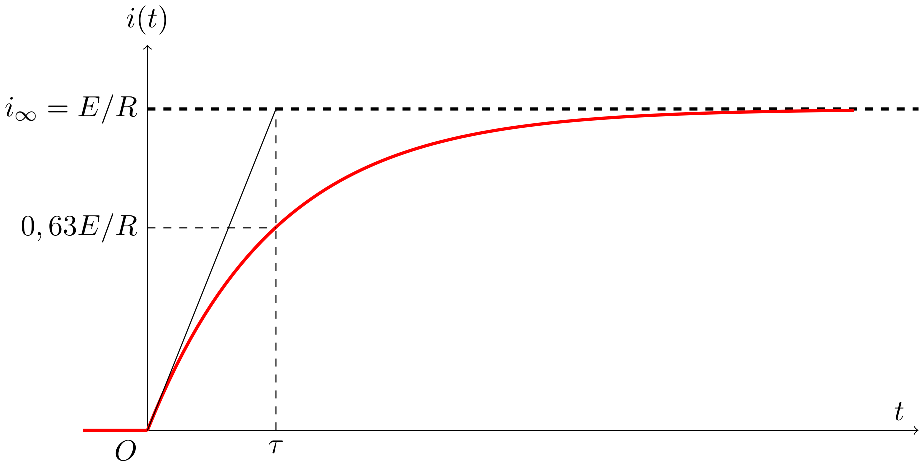
La continuité de l'intensité entraîne la continuité de la tension aux bornes de la résistance R.

Ainsi $u(0) = E + \lambda = 0 \quad$ d'où $\lambda = -E$.

$$\boxed{u_R(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R}}$$



On pourrait de la même manière tracer $i(t) = \frac{u_R(t)}{R} = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.

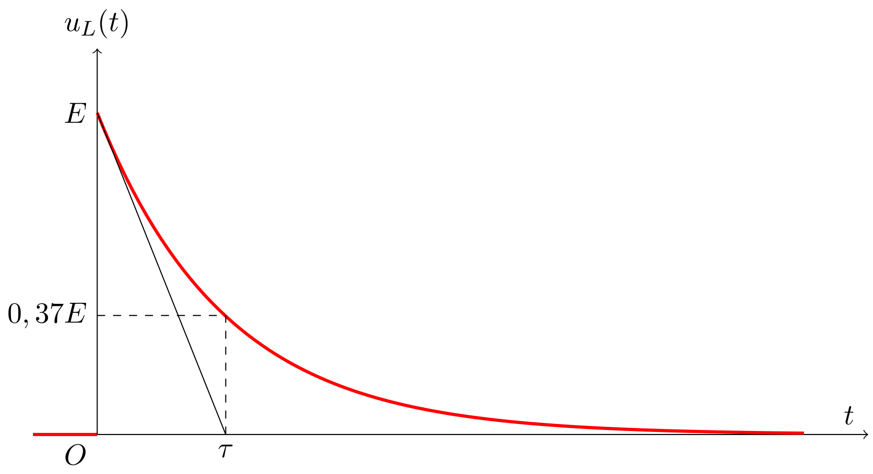


Retrouver sans calcul la valeur de i_∞.

d) Réponse en tension aux bornes de la bobine.

Pour $t < 0$ $u_L(t) = 0$

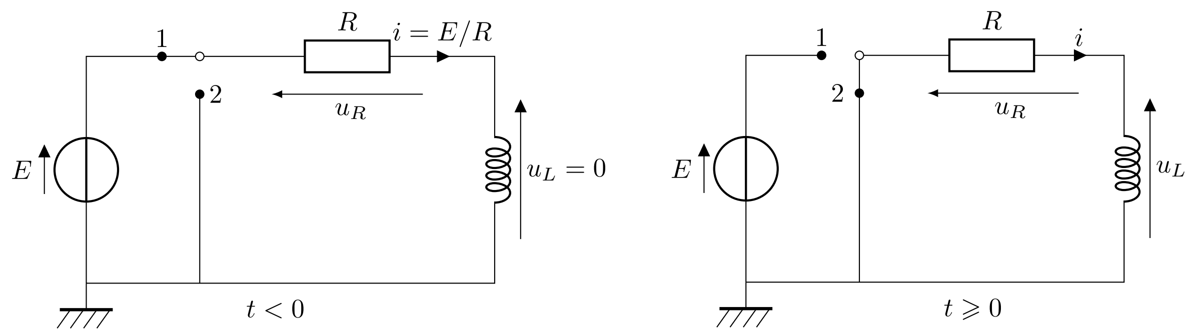
Pour $t \geqslant 0$, $\quad u_L(t) = E - u_R(t) = E - E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$



La tension aux bornes de la bobine est discontinue à $t = 0$.

II.2. Extinction du courant

On suppose le régime permanent stationnaire atteint : l'intensité du courant a atteint sa valeur asymptotique $i = E/R$ et la tension aux bornes de la bobine est nulle (elle est équivalente à un fil).
À $t = 0$ on bascule l'interrupteur de la position 1 à la position 2.



a) Mise en équation pour u_R

D'après la loi des mailles :

$u_L + u_R = 0$

avec $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{u_R}{R}\right) = \dfrac{L}{R}\dfrac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t}$

$\dfrac{L}{R}\dfrac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} + u_R = 0$

que l'on écrit sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}u_R = 0$$

On obtient une équation différentielle du premier ordre linéaire à coefficient constant, homogène, qu'on exprime sous forme canonique :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\tau}u_R=0 \quad \text{avec } \tau=\frac{L}{R}} \tag{E0}$$

b) Résolution

La solution générale de l'équation homogène (E0) est telle que

$$\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\tau}u_R$$

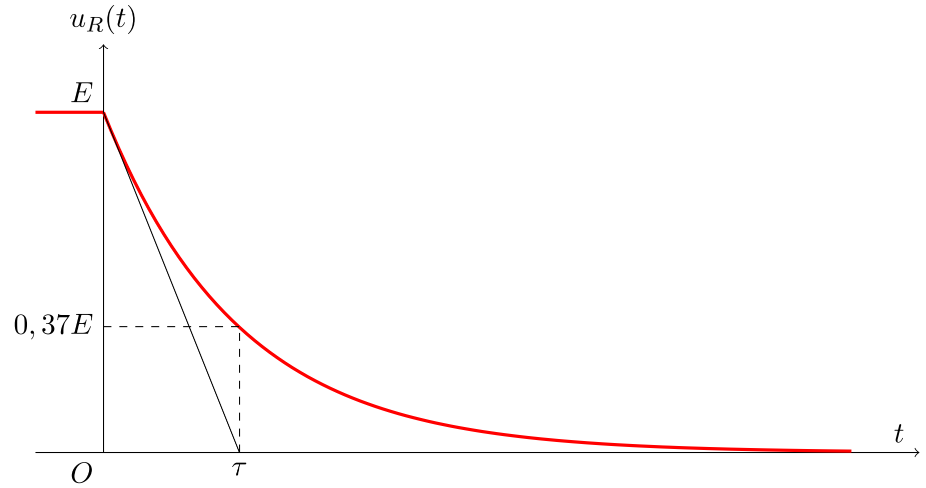
$$u_R(t)=\lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$$

La constante λ se détermine à l'aide des conditions initiales :
L'intensité du courant traversant la bobine étant continue $i(0^-)=i(0^+)=i(0)=\frac{E}{R}$. La tension aux bornes de R est donc également continue :

$$u_R(0^-)=u_R(0^+)=u_R(0)=Ri(0)=E$$

On en déduit $u(0)=\lambda=E$

$$\boxed{u_R(t)=Ee^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec } \tau=\frac{L}{R}}$$



II.3. Bilan énergétique

a) Établissement du courant

La loi des mailles permet d'établir la relation :

$$E=Ri+u_L=Ri+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

On multiplie chaque membre de l'égalité par i.

$$Ei=Ri^2+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}i$$

$$Ei=Ri^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

- Ei : puissance électrique fournie par le générateur
- Ri^2 : puissance électrique reçue par la résistance et dissipée par effet Joule
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}Li^2\right)$: puissance électrique reçue par la bobine.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} \quad \text{avec } \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}Li^2 \text{ l'énergie stockée dans la bobine}$$

Lorsque $t \to \infty$, $i_\infty = \dfrac{E}{R} = cte.$

$$Ei_\infty = Ri_\infty^2$$

Lorsque le régime permanent est atteint, toute la puissance fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans la résistance R.

L'énergie stockée dans la bobine vaut :

$$E_{m\infty} = \frac{1}{2}Li_\infty^2 = \frac{1}{2}L\left(\frac{E}{R}\right)^2$$

b) Extinction du courant

La loi des mailles donne :

$$0 = Ri + u_L = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

On multiplie par i.

$$0 = Ri^2 + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}i$$

$$0 = Ri^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

On peut calculer l'énergie totale dissipée par effet Joue dans la résistance.

$$Ri^2 = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

$$E_J = \int_0^\infty Ri^2\mathrm{d}t = \int_0^\infty -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)\mathrm{d}t$$

$$E_J = \left[-\frac{1}{2}Li^2\right]_0^\infty = -\frac{1}{2}L\underbrace{i_\infty^2}_{=0} + \frac{1}{2}Li^2(0)$$

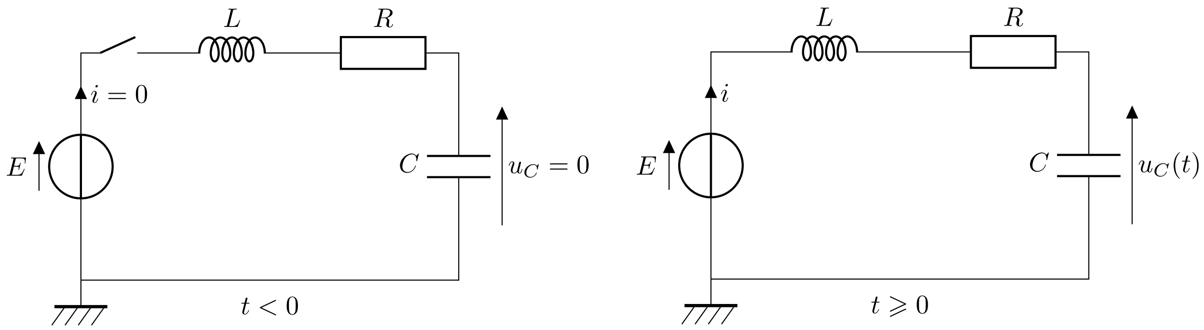
$$E_J = \frac{1}{2}Li^2(0) = \frac{1}{2}L\left(\frac{E}{R}\right)^2$$

L'énergie initialement stockée dans la bobine est totalement dissipé par effet Joule dans la résistance.

III. Circuit RLC série en régime transitoire

III.1. Mise en équation de la charge du condensateur

On considère un circuit RLC série relié à une source de tension idéale de f.é.m. E.
À $t = 0$ on ferme l'interrupteur, le condensateur n'étant pas chargé.



D'après la loi des mailles

$$E - u_R - u_L - u_C = 0$$

$$E = u_R + u_L + u_c$$

$$E = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_C$$

avec $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ (on est en convention récepteur). D'où

$$E = RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + u_C$$

La tension $u_C(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$LC\ddot{u}_C + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E$$

que l'on peut exprimer sous la forme :

$$\ddot{u}_C + \frac{R}{L}\dot{u}_C + \frac{1}{LC}u_C = \frac{E}{LC}.$$

On peut réécrire le membre de gauche sous la forme canonique déjà rencontrée lors de l'étude de l'oscillateur amorti.

$$\boxed{\ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E} \qquad \text{(E)}$$

avec

$\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$, $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ la **pulsation propre** du circuit

et

$\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{R}{L}$, $\boxed{Q = \dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}}$ le **facteur de qualité** du circuit.

La **pulsation propre** ω_0 correspond à la pulsation des oscillations qui se produiraient en l'absence de résistance ($R = 0$). Elle se mesure en rad.s^{-1} et est donc homogène à l'inverse d'un temps $[\omega_0] = T^{-1}$.

Le **facteur de qualité** Q est une grandeur sans dimension. Il est d'autant plus élevé que la résistance du circuit est faible.

III.2. Les différents régimes

L'équation (E) obtenue est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, à second membre constant, comparable à celle rencontrée lors de l'étude de l'oscillateur harmonique amorti.
On lui associe l'équation sans second membre (équation homogène) :

$$\boxed{\ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = 0} \tag{E0}$$

d'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

qui admet pour discriminant : $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2$.
La solution générale de (E) est la superposition :

- d'une solution particulière de l'équation avec second membre. Celui-ci étant constant on cherche une solution particulière constante $u_{C_p} = K$ telle que :

$$0 + 0 + \omega_0^2 K = \omega_0^2 E$$

$$K = E$$

ainsi $u_{C_p} = K = E$.

- de la solution de générale de (E0)

La nature des solutions de (E0) dépendra du signe de Δ.
Si on se place à ω_0 fixée (L et C fixés), le signe de Δ dépendra uniquement de la valeur de Q et donc de la valeur de la résistance R.

a) Cas $\Delta < 0$ (résistance faible)

$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 < 0$

$\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 < 4\omega_0^2$

$Q^2 > \frac{1}{4}$

$\boxed{Q > \frac{1}{2}}$

Or $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ d'où $\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} > \frac{1}{2}$ soit $\boxed{R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$

Le trinôme admet deux racines complexes conjuguées :

$r_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\omega_0}{Q} \pm i\sqrt{-\Delta}\right)$

$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4\omega_0^2 - \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4\omega_0^2\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)}$

$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega$ avec $\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ pseudo-pulsation ($\omega < \omega_0$ et $\omega \simeq \omega_0$ pour $Q \geqslant 5$).

$$u_{C_h}(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t.\right)$$

puis

$$\boxed{u_C(t) = u_{C_h}(t) + u_{C_p} = E + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t.\right)}$$

Les constantes A et B se déduisent des conditions initiales.

Le condensateur est initialement déchargé et aucun courant ne circule (interrupteur ouvert pour $t < 0$).

- Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur : $u_C(0^-) = u_C(0^+) = u_C(0) = 0$.
- Par continuité de l'intensité du courant dans la bobine : $i(0^-) = i(0^+) = i(0) = 0$ avec $i = C\dot{u}_C$.

On retient donc les conditions initiales : $\begin{cases} u_c(0) = 0 \\ \dot{u}_C(0) = 0 \end{cases}$

Ainsi

$u_c(0) = E + A = 0$ d'où $\boxed{A = -E}$.

$$\dot{u}_C(t) = -\frac{\omega_0}{2Q}e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t.\right) + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t\right)$$

$$\dot{u}_C(0) = -\frac{\omega_0}{2Q}A + B\omega.$$

d'où $\boxed{B = \frac{\omega_0}{2Q\omega}A = -\frac{\omega_0}{2Q\omega}E}$.

On peut exprimer B uniquement en fonction de E et Q :

$$B = -\frac{\omega_0}{2Q\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}E = \frac{1}{1\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

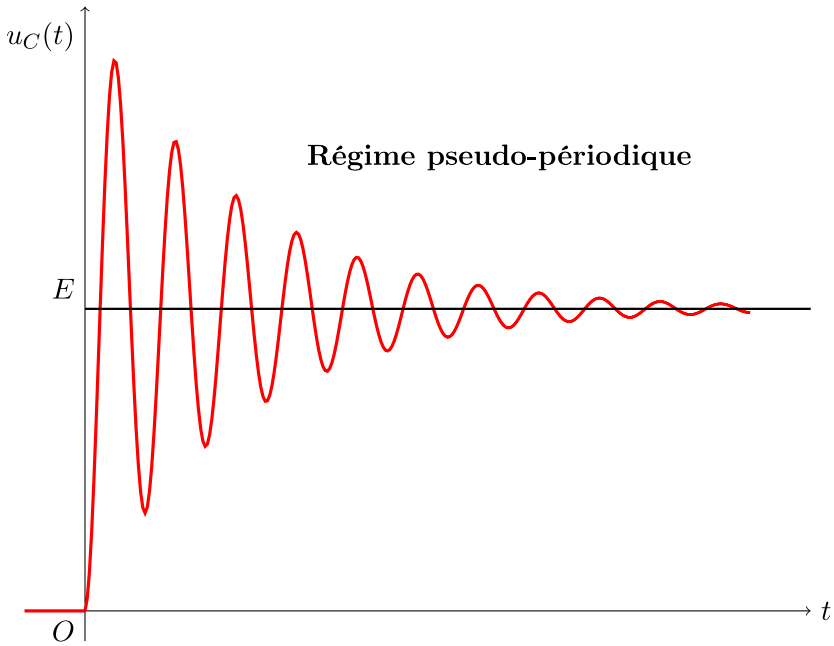
D'où

$$\boxed{u_C(t) = E - Ee^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(\cos\omega t + \frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}}\sin\omega t.\right)}$$

On a tracé ci-dessous l'allure de la solution :

— Comment trouver sans calcul la valeur asymptotique de $u_C(t)$?

— Donner l'expression du temps caractéristique τ du régime transitoire.



Calcul de la pseudo-période T :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$$

pour $Q \geqslant 5$, $T \simeq T_0$ à mieux d'1% près.

Rappel : Interprétation graphique du facteur de qualité

Pour $Q \geqslant 5$, le facteur de qualité correspond au nombre d'oscillations d'amplitude significative (c'est à dire d'amplitude supérieure à 5% de l'amplitude initiale) autour de la valeur asymptotique. Cela permet d'estimer graphiquement le facteur de qualité.

b) Cas $\Delta = 0$ (résistance critique)

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = 0$$

$\boxed{Q = \frac{1}{2}}$ $\quad R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_C$ résistance critique

L'équation caractéristique admet une racine double $r_0 = -\dfrac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$ car $Q = \frac{1}{2}$.

Dans ce cas la solution de (E0) est de la forme :

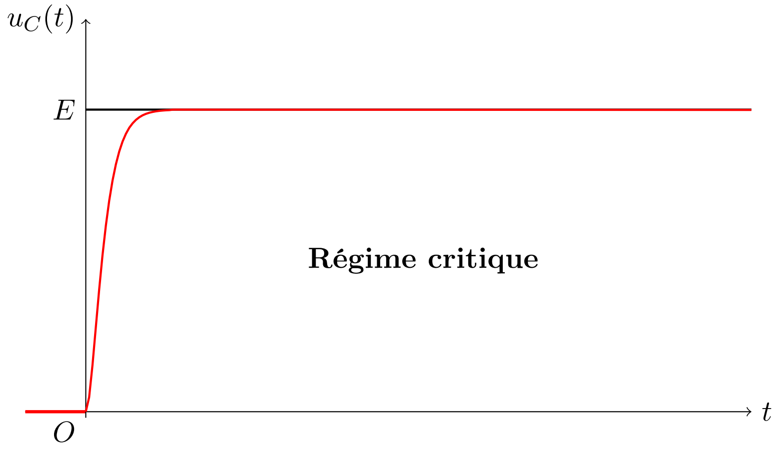
$$u_{C_h}(t) = e^{-\omega_0 t}(At + B)$$

d'où, en ajoutant la solution particulière :

$$u_C(t) = u_{C_h}(t) + u_{C_p} = E + e^{-\omega_0 t}(At + B)$$

Les constantes A et B peuvent se déduire des conditions initiales. Vous pourrez vérifier que la solution vérifiant les conditions initiales $\begin{cases} u_c(0) = 0 \\ \dot{u}_C(0) = 0 \end{cases}$ est de la forme :

$$\boxed{u_C(t) = E - Ee^{-\omega_0 t}(\omega_0 t + 1)}$$



c) Cas $\Delta > 0$ (amortissement important)

$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 > 0$

$\boxed{Q < \frac{1}{2}}$ $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

L'équation caractéristique admet deux racines réelles négatives r_1 et r_2 avec $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2}$. Dans ce cas la solution de (E0) est de la forme :

$$u_{C_h}(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

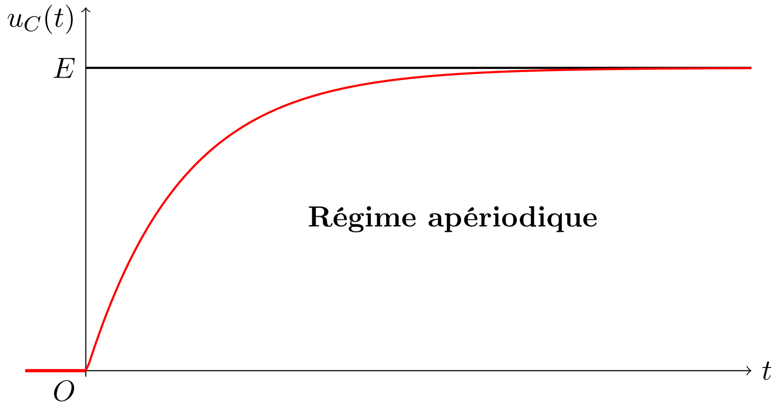
D'où, en ajoutant la solution particulière,

$$u_C(t) = E + Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \text{ avec } r_1 < 0 \text{ et } r_2 < 0$$

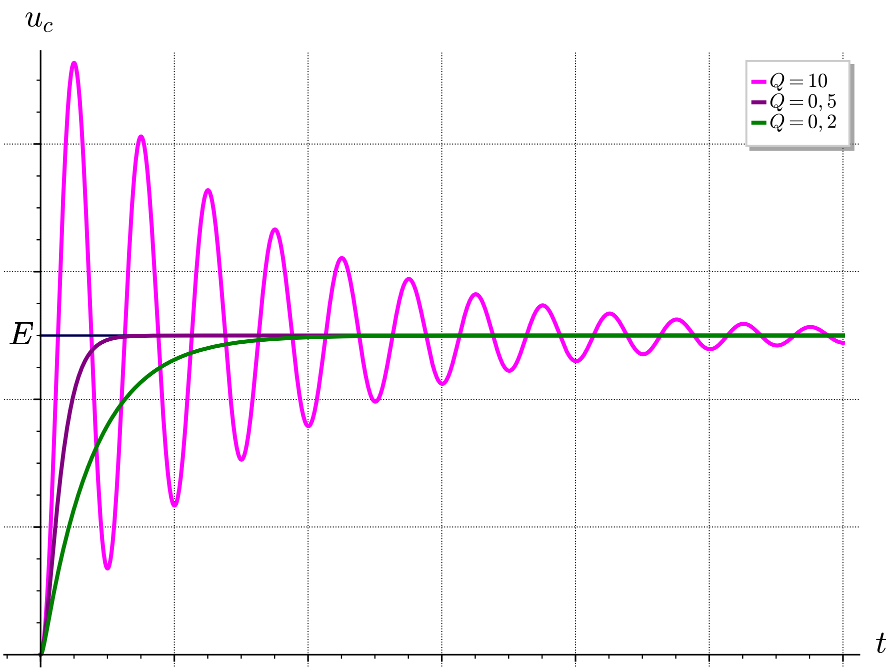
Les constantes A et B peuvent se déduire des des conditions initiales. Vous pourrez vérifier que la solution vérifiant les conditions initiales $\begin{cases} u_c(0) = 0 \\ \dot{u}_C(0) = 0 \end{cases}$ est de la forme :

$$\boxed{u_C(t) = E - E\left(\frac{r_2}{r_2 - r_1}e^{r_1 t} - \frac{r_1}{r_2 - r_1}e^{r_2 t}\right)}$$

avec $r_1 < 0$ et $r_2 < 0$.



Comparaison des trois régimes :



C'est pour le régime critique que la valeur limite stationnaire est atteinte le plus rapidement.

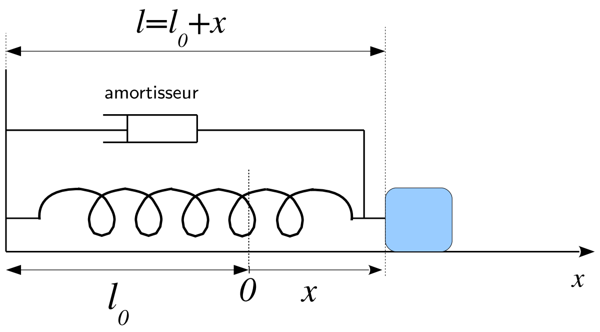
III.3. Analogie mécanique

On a déjà rencontré en mécanique le même type d'équation.

Considérons une masse m susceptible de se déplacer sans frottement sur plan horizontal. Elle est soumise à l'action d'un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k, à laquelle s'ajoute l'action d'un amortisseur qui crée une force opposée à la vitesse $\vec{F_a} = -h\vec{v}$.

Si on écarte la masse de sa position d'équilibre $x = 0$ et qu'on la lâche sans vitesse, elle reviendra à sa position de repos soit par des oscillations amorties (régime pseudo périodique), soit sans osciller (régime critique, régime apériodique) si l'amortissement est plus élevé.

À l'aide du principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle du mouvement de la masse m.



Système : masse m

Référentiel : référentiel du labo supposé galiléen

Bilan des forces :

- poids $m\vec{g} \perp \vec{u}_x$
- réaction normale $\vec{R}$ du support $\perp \vec{u}_x$
- tension du ressort :
  $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x = -k(\ell_0 + x - \ell_0)\vec{u}_x = -kx\vec{u}_x$.
- force d'amortissement $\vec{F_a} = -h\vec{v} = -h\dot{x}\vec{u}_x$

Principe fondamental de la dynamique :

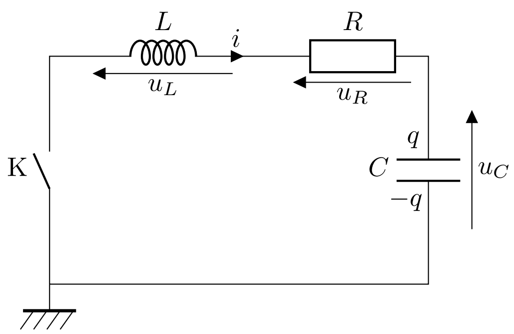
$$m\vec{a} = m\ddot{x}\vec{u}_x = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{F}$$

projeté sur $\vec{u}_x$:

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x}$$

$$\boxed{m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = 0} \qquad \text{(EM)}$$

Considérons a présent le circuit RLC série ci-dessous. On suppose le condensateur initialement chargé et à $t = 0$ on ferme l'interrupteur K. Le condensateur va alors se décharger. La tension uc retournera à 0 soit via des oscillation amorties, soit sans osciller si la résistance est suffisamment élevée.



On note q la charge portée par le condensateur. Elle vérifie

$$q = Cu_C \qquad et \qquad i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

À l'aide de la loi des mailles et des différentes relations courant-tension, établir l'équation vérifiée par $q(t)$.

Lorsque K est fermé

$$u_C + u_R + u_L = 0$$

$$\frac{q}{C} + Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\frac{q}{C} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

$$\boxed{L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0} \qquad \text{(EE)}$$

En faisant l'analogie entre (EM) et (EE) on peut établir les équivalences :

	Grandeurs		Paramètres			Aspect énergétique		
Élec	q	$\dot{q} = i$	L	R	$\frac{1}{C}$	$\frac{1}{2}Li^2$	$\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$	Ri^2
Méca	x	$\dot{x} = v$	m	h	k	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}kx^2$	hv^2

	Pulsation propre	Facteur de qualité
Élec	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$
Méca	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$Q = \frac{\sqrt{km}}{h}$

Notions et contenus	Capacités exigibles
13. Circuits linéaires en régime transitoire	
Charge et décharge d'un condensateur dans un circuit RC série	Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes d'un condensateur dans le cas de sa charge par une source idéale de tension et dans le cas de sa décharge.
Temps caractéristique	Déterminer l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire dans un circuit RC série.
Énergie stockée dans un condensateur.	Démontrer l'expression de l'énergie stockée dans un condensateur
Établissement et rupture du courant dans un circuit RL série.	Établir et résoudre l'équation différentielles vérifiée par la tension aux bornes d'une bobine dans le cas de l'établissement et de la rupture du courant.
Temps caractéristique	Déterminer l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire dans un circuit RL série.
Énergie stockée dans une bobine	Démontrer l'expression de l'énergie stockée dans un bobine d'inductance connue
Circuit RLC série en régime dépendant du temps	Établir et résoudre l'équation d'évolution de la tension aux bornes du condensateur lors de sa charge ou de sa décharge, dans les différents régimes possibles Écrire l'équation différentielle en faisant apparaître la pulsation propre et le facteur de qualité
Analogie mécanique	Décrire et exploiter les analogies avec l'oscillateur harmonique mécanique amorti. Identifier les paramètres et grandeurs analogues.