TD - Th9 - Conduction thermique

1 Double vitrage

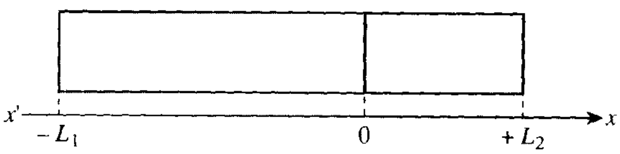
On se place en régime stationnaire.
L'intérieur d'une pièce est séparé de l'extérieur par une paroi vitrée de surface S, orthogonale à l'axe Ox et dont le verre a une conductivité thermique λ. Ses faces interne et externe sont respectivement aux températures T_i et T_e avec $T_e < T_i$.

1. La paroi est une vitre simple d'épaisseur e. Donner l'expression du flux thermique Φ_1 sortant de la pièce à travers cette paroi en fonction de λ, S, e, T_i et T_e.
   En déduire la résistance thermique R_{th} de la paroi vitrée.
2. La paroi est un ensemble de deux vitres de même épaisseur e, séparées par une épaisseur e' d'air de conductivité thermique λ'. On ne tient compte que de la conduction.
   (a) Évaluer le flux thermique Φ_2 sortant de la pièce, puis $\dfrac{\Phi_2}{\Phi_1}$.
   (b) A.N : $T_e = 270$ K, $T_i = 292$ K, $e' = e = 3$ mm, $\lambda = 1,2$ W.m^{-1}.K^{-1}, $\lambda' = 0,025$ W.m^{-1}.K^{-1}.
   Calculer $\dfrac{\Phi_2}{\Phi_1}$ et les températures T_1 et T_2 des faces en regard des deux vitres. Représenter graphiquement les variations de la température en fonction de x dans le double vitrage.
   Conclusion.

2 Étude de la sensation de froid et de chaud.

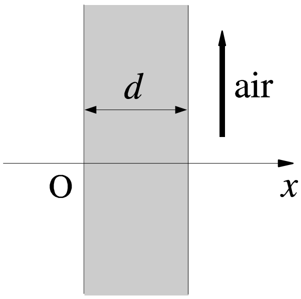
On cherche à interpréter l'observation suivante : un observateur posant sa main sur une table en bois et une table en acier à la même température a l'impression que le bois est plus chaud que l'acier.

On adopte le modèle suivant : deux cylindres isolés latéralement de même section S, de même axe Ox, de conductivités respectives λ_1 et λ_2, de masses volumiques μ_1 et μ_2, de capacités thermiques massiques c_1 et c_2 et de longueur L_1 et L_2 sont mis bout à bout ; le contact s'établissant en $x = 0$. On maintient les extrémités $x = -L_1$ et $x = L_2$ des deux cylindres aux températures respectives T_1 et T_2. On étudie un régime stationnaire pour lequel la température $T(x, t)$ est indépendante du temps t.



1. Déterminer la température T_i à l'interface entre les deux cylindres.
2. On donne les conductivités thermiques :
   – main $\lambda_1 = 10$ W.m^{-1}.K^{-1}
   – bois $\lambda_2 = 1,0$ W.m^{-1}.K^{-1}
   – acier $\lambda_2 = 100$ W.m^{-1}.K^{-1}
   – $L_1 = L_2$; $T_1 = 37^o$C ; $T_2 = 20^o$C ;
   Calculer T_i pour un contact main-bois, puis pour un contact main-acier. Commenter.

3



Une couche d'isolant d'épaisseur $d = 10$ cm et de conductivité thermique $\lambda = 0,04$ W.m^{-1}.K^{-1}, a une face maintenue à la température $\theta_1 = 100$°C.
L'autre face est refroidie par convection d'un courant d'air à $\theta_0 = 25$°C, qui doit maintenir sa température à la valeur $\theta_2 = 30$°C (en régime permanent).

Quelle doit être la valeur du coefficient de transfert convectif h au niveau de la paroi refroidie par l'air ?
Quel paramètre peut-on adapter simplement pour obtenir cette valeur ?

4 Comportement social thermorégulateur des manchots

Un manchot se modélise par un parallélépipède rectangle de section carrée de côté $a = 10$ cm et de hauteur $\ell = 50$ cm. Le manchot maintient sa température interne $T_i = 37$°C au moyen d'un apport métabolique $\mathscr{P}_1 = 50$ W qui compense les pertes par conduction thermique au travers de son revêtement de plume d'épaisseur $e = 1,0$ cm et de conductivité thermique λ.

1. Déterminer la valeur de la conductivité thermique λ du revêtement de plume sachant que la température extérieure (y compris au niveau du sol) est $T_e = -20$°C.
2. Pour faire face à des températures extrêmes, neuf manchots se serrent les uns contre les autres, formant un carré de 3×3 manchots. Le pavage est parfait, seules les faces supérieures, inférieures et latérales périphériques sont sujettes aux pertes thermiques. De combien le métabolisme nécessaire au maintient de la température interne, rapporté à un manchot, est-il réduit lorsque les neuf manchots se serrent les uns contre les autres ?
3. Comparer sans calcul, les gains d'énergie réalisés suivant la position du manchot dans le groupe. Calculer ensuite numériquement les gains réalisés pour les diverses positions envisagées.

5 Température cutanée d'un mammifère

Un mammifère peut être très sommairement schématisé par une sphère de muscles de centre O, de rayon R dont le métabolisme dégage la puissance thermique $\mathscr{P}_v$ par unité de volume, uniformément dans tout son volume. L'air extérieur a une conductivité thermique λ, sa température loin de l'animal est $T_0 = 20$°C. On s'intéresse à la température de l'air (donc pour $r \geqslant R$) en régime permanent.

1. Montrer que le vecteur densité de flux thermique est de la forme $\vec{\jmath} = j(r)\vec{u}_r$ et préciser l'expression de $j(r)$.
2. Donner l'expression de $\phi(r)$, flux sortant du vecteur $\vec{\jmath}$ à travers une surface sphérique de centre O et de rayon r.
3. Faire un bilan énergétique pour une couche d'air sphérique, comprise entre les sphères de rayon r et de rayon $r + \mathrm{d}r$. En déduire que $\phi(r) = cte$.
4. Établir l'expression du champ de température dans l'air, en fonction de ϕ, λ, r, et T_0.
5. Quelle est la température cutanée T_C de l'animal en $r = R$? On exprimera T_C en fonction de $\mathscr{P}_v$, λ, R et T_0.
   Commenter la variation de T_C en fonction de λ à R fixé puis en fonction de R, λ étant fixé.
6. Quelle doit être la valeur de $\mathscr{P}_v$ pour avoir $T_C = 30$°C dans l'air puis dans l'eau ? On donne $\lambda = 5,0.10^2$ W.m^{-1}.K^{-1} pour l'eau et $\lambda = 5,0$ W.m^{-1}.K^{-1} pour l'air. On prendra $R = 25$ cm (ce qui permet d'avoir un rapport surface/volume voisin de celui de l'être humain). Pourquoi n'existe-t-il pas de mammifères marin de petite taille ?

6 Diamètre d'un fusible

Un fusible est constitué d'un fil cylindrique en plomb de rayon r et de longueur L traversé par un courant d'intensité I. Le fil est enfermé dans une capsule remplie d'un isolant thermique. Ses deux extrémités sont serties dans des plots métalliques massifs qui sont à une température T_0 constante (ambiante).

1. À partir d'un bilan énergétique effectué sur une tranche d'épaisseur dx, établir l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$. Montrer qu'elle est de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\rho I^2}{\lambda S^2}$$

   où S est la section du fil.

2. En déduire l'expression de $T(x)$, température le long du fil en régime permanent. On posera $x = 0$ à une extrémité et $x = L$ à l'autre. Où la température est-elle maximale ?
3. Déterminer le diamètre du fil pour qu'il fonde pour une intensité égale à $5,0$ A.

Application numérique :
– conductivité thermique du plomb : $\lambda = 34$ W. m^{-1}.K^{-1} ;
– résistivité du plomb : $\rho = 22,1\ \mu\Omega$.cm ;
$L = 5,0$ cm ; $T_0 = 25°$C ; $T_{\text{fusion}} = 328°$C.

Données : la résistance d'un tronçon de conducteur de longueur ℓ et de section S s'exprime sous la forme : $R = \dfrac{\rho\ell}{S}$.

7 Isolation d'une canalisation

Une canalisation en acier de faible épaisseur, de rayon extérieur $a = 2$ cm et de longueur $L = 30$ m, transporte de l'eau à la température $T_i = 90°$C. Pour diminuer les déperditions thermiques, on l'entoure d'un manchon isolant d'épaisseur $e = 4$ cm en laine de verre. La température de la surface extérieure du manchon est $T_e = 30°$C. On se place en régime stationnaire. Compte tenu de la géométrie du problème, le champ de température dans l'isolant est de la forme $T(r)$ en coordonnées cylindriques.

Calcul de la résistance thermique

1. Montrer que le vecteur densité de flux thermique est de la forme $\vec{\jmath} = j(r)\vec{u}_r$ et préciser l'expression de $j(r)$.
2. Donner l'expression de $\phi(r)$, flux sortant du vecteur $\vec{\jmath}$ à travers une surface cylindrique de longueur L et de rayon r.
3. Faire un bilan énergétique pour une couche d'isolant cylindrique, comprise entre les cylindres de rayon r et de rayon $r + \mathrm{d}r$. En déduire que $\phi(r) = cte$.
4. Établir l'expression du champ de température dans l'isolant, en fonction de ϕ, λ, r, a et T_i.
5. Définir, puis montrer que la résistance thermique de l'isolant a pour expression

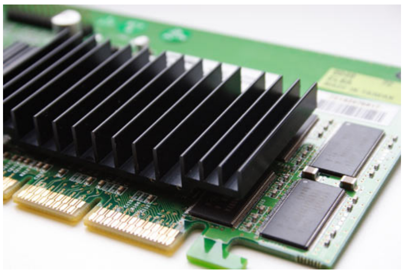
$$R_{\text{th}} = \frac{1}{2\pi\lambda L}\ln\left(\frac{a+e}{a}\right)$$

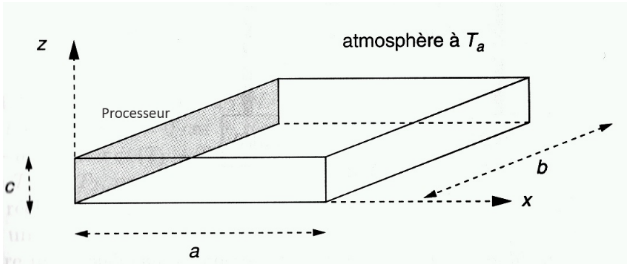
Calcul des pertes thermiques

6. On donne les conductivités thermiques de la laine de verre et de l'acier : $\lambda_L = 0,04$ W.m^{-1}.K^{-1} ; $\lambda_a = 50$ W.m^{-1}.K^{-1}. Expliquer pourquoi on peut négliger la résistance thermique du métal.
7. En déduire les déperditions thermiques (puissance thermique à travers la paroi de la canalisation)

8 Ailette de refroidissement

Pour évacuer la chaleur d'une source vers l'atmosphère (l'effet Joule d'un microprocesseur par exemple), on a souvent recours au dispositif représenté ci-dessous à droite : une plaque de coté a, b et c est collée en $x = 0$ à la source de chaleur qui impose $T(x = 0) = T_0$. Cette plaque de conductivité thermique λ est plongée dans l'atmosphère de température T_a constante. On notera $\mathcal{S} = bc$ la surface d'une section de l'ailette et $\mathcal{P} = 2(b + c)$ son périmètre.
Pour décrire simplement les échanges thermiques entre l'air et l'ailette, qui sont gouvernés par un processus conducto-convectif, on adopte la loi de Newton en notant h la constante caractérisant l'efficacité de ce transfert.
On se place en régime stationnaire et on suppose en première approximation que la température T dans l'ailette ne dépend que de x.





1. Exprimer la puissance évacuée dans l'air par la tranche de la plaque comprise entre x et $x + \mathrm{d}x$.
2. En faisant un bilan d'énergie pour la tranche de la plaque comprise entre x et $x + \mathrm{d}x$, montrer que $T(x)$ vérifie l'équation :
$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} - \frac{T}{L^2} = -\frac{T_a}{L^2}$$
et exprimer la constante L en fonction des données. Préciser sa dimension.

On suppose que $a \gg L$ de sorte qu'on puisse raisonner sur une plaque de longueur a infinie et admettre qu'à l'extrémité de celle-ci, l'atmosphère impose $T(x = a) = T(\infty) = T_a$.

3. Établir l'expression de $T(x)$ en fonction de T_0, T_a, x et L :
$$T(x) = (T_0 - T_a)e^{-x/L} + T_a$$
4. Tracer le graphe de $T(x)$ et interpréter concrètement L. Comment un industriel choisira-t-il la longueur a de la plaque par rapport à L ?
5. Exprimer le flux thermique total ϕ_a évacué par l'ailette.
6. Exprimer le flux ϕ_0 qui serait évacué par la même surface $\mathcal{S} = bc$ en l'absence d'ailette et en déduire une définition de l'efficacité η de l'ailette.
7. Évaluer ce rendement.

Données : $h = 5$ W.m^{-2}.K^{-1} ; $\lambda = 5.10^2$ W.m^{-1}.K^{-1} ; $b = 1$ cm ; $c = 1$ mm.