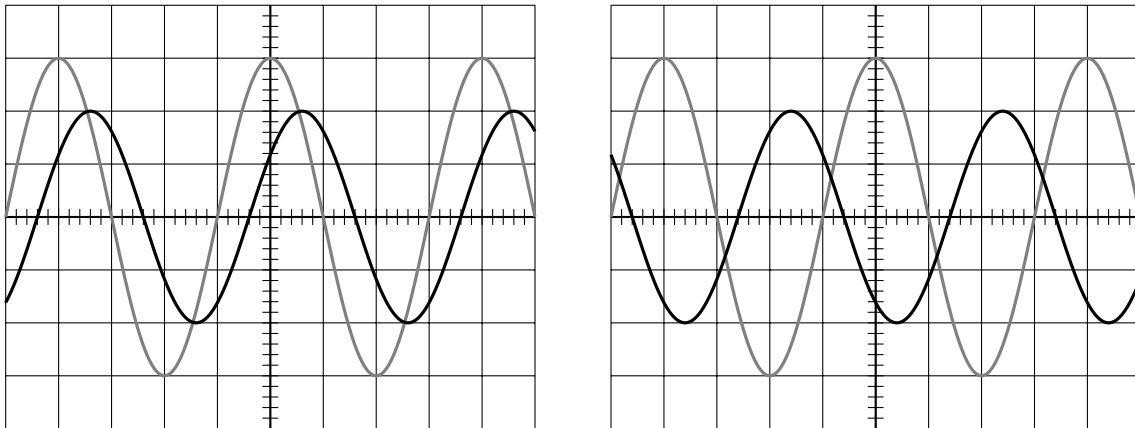


TD - M6 - Oscillations forcées

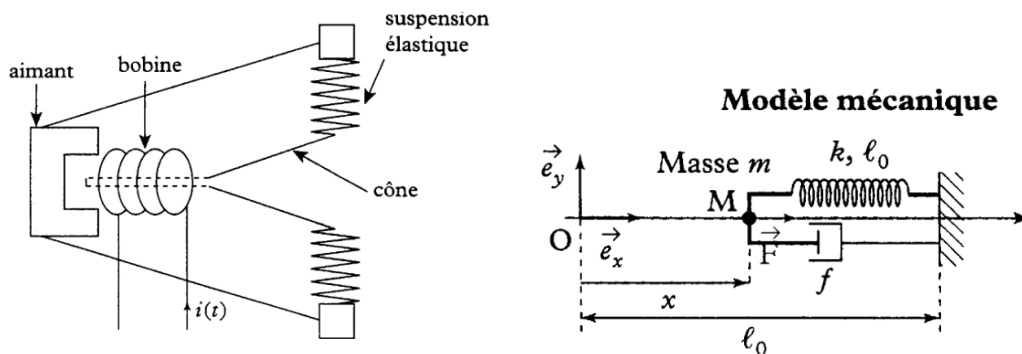
1 Mesures de déphasages



On visualise deux signaux sur un écran d'oscilloscope : le premier (en gris) s'exprime sous la forme : $e(t) = e_m \cos \omega t$ et le second (en noir) s'exprime sous la forme $s(t) = s_m \cos(\omega t + \varphi)$ avec $\varphi \in] - \pi, \pi]$. Exprimer φ dans chacun des cas.

2 Modélisation mécanique d'un haut-parleur

On modélise la partie mécanique d'un haut-parleur à l'aide d'une masse m , se déplaçant horizontalement sans frottement le long de l'axe (O, \vec{e}_x) . Cette masse m , assimilée à un point matériel M , est reliée à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k ainsi qu'à un amortisseur fluide exerçant une force $-\lambda \vec{v}$ (avec λ constante).



Elle est soumise à une force $\vec{F}(t)$, imposée par le courant $i(t)$ entrant dans le haut-parleur. Cette force est proportionnelle au courant $i(t)$ circulant dans la bobine et s'exprime sous la forme $\vec{F}(t) = K_0 i(t) \vec{e}_x$, avec K_0 une constante. On suppose que le courant est sinusoïdal : $i(t) = I_m \cos(\omega t)$. avec $\omega = 2\pi \times 1,0 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$.

Données : $m = 10 \text{ g}$, $k = 15 \text{ kN.m}^{-1}$, $K_0 = 200 \text{ N.A}^{-1}$ et $I_m = 1 \text{ A}$.

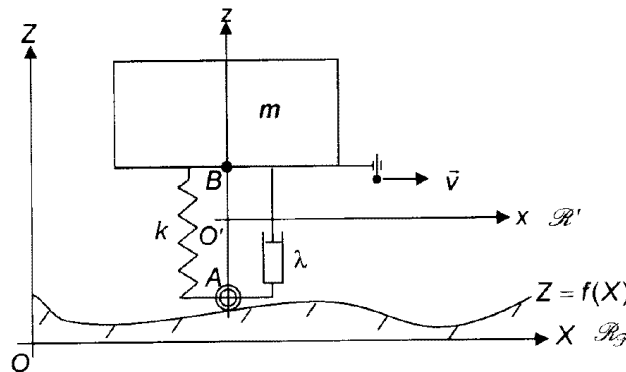
1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la position x de M .
2. Poser une pulsation propre ω_0 et un facteur de qualité Q , puis calculer λ pour obtenir $Q = 1/\sqrt{2}$. On suppose cette condition vérifiée dans toute la suite.
3. Déterminer l'amplitude complexe $\underline{x}_m(\omega)$ de M en régime forcé.
4. Déterminer numériquement, pour la pulsation imposée par le courant, l'expression de la réponse forcée $x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$.

3 Oscillations verticales d'une remorque.

Une remorque, assimilable à un point matériel de masse $m = 100$ kg situé en un point B , est tirée par un véhicule roulant à la vitesse horizontale constante \vec{v} . Elle repose sur une roulette A de dimensions et de masse négligeables devant m , par l'intermédiaire d'une suspension constituée d'un ressort de raideur $k = 6,10 \cdot 10^3$ N.m⁻¹ et d'un amortisseur (piston coulissant dans un cylindre rempli d'huile) dont le coefficient d'amortissement est λ . La force qu'exerce l'amortisseur sur la remorque vaut en norme $\|\vec{F}\| = \lambda \left| \frac{dl}{dt} \right|$ où l est la longueur AB .

La longueur à vide du ressort est $AB = l_0 = 70$ cm. On donne $g = 9,81$ m.s⁻².

Le référentiel terrestre \mathcal{R}_T est associé au repère $OXYZ$ avec OX horizontal de même direction et sens que \vec{v} et OZ vertical ascendant. Le profil de la route peut être décrit par une fonction $Z = f(X)$. Le mouvement de B sera étudié par rapport au référentiel \mathcal{R}' d'origine O' en translation rectiligne uniforme à la vitesse \vec{v} par rapport à \mathcal{R}_T et également galiléen. L'altitude de O' dans $OXYZ$ sera définie dans la question 1) et le mouvement de B est décrit par une fonction $z(t)$.



La route, dans une première partie est plane et horizontale, et correspond au profil $Z = 0$.

- Calculer la longueur ℓ_1 du ressort quand B est à l'équilibre par rapport au référentiel \mathcal{R}' .

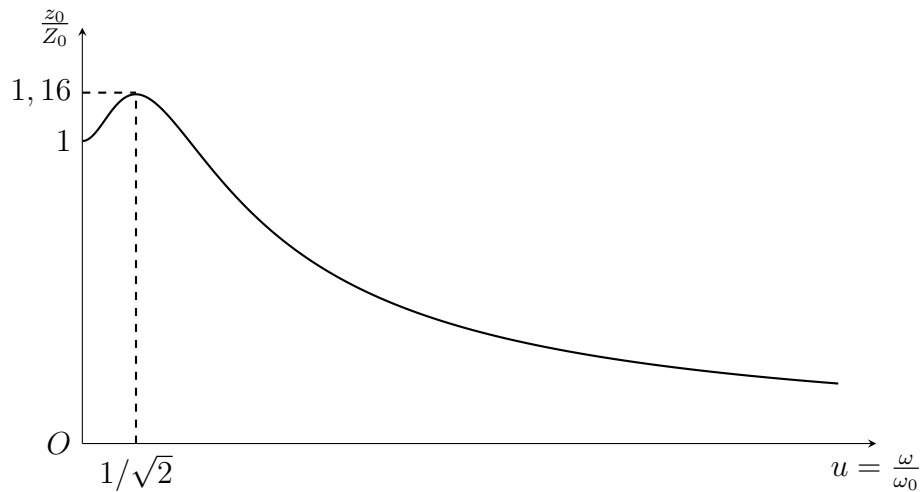
Dans toute la suite, l'altitude de O' sera prise égale à ℓ_1 . On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

- Le coefficient d'amortissement λ possède, dans toute la suite, une valeur critique $\lambda = \lambda_c = 2\sqrt{mk}$. Calculer numériquement λ_c et établir l'équation différentielle du mouvement de B dans \mathcal{R}' . Résoudre cette équation avec comme conditions initiales : $z(0) = z_0 = 10$ cm et $\dot{z} = \dot{z}_0 = 0$. Quel est l'intérêt pratique de la présence de l'amortisseur ?

La route possède à présent un profil sinusoïdal de type "tôle ondulée" décrit par la fonction $Z = Z_0 \cos(2\pi \frac{X}{L})$ où $Z_0 = 5$ cm.

- Quelle est l'expression de la pulsation ω du mouvement de la roulette A dans le référentiel \mathcal{R}' ?
 - On observe qu'en régime établi, $z(t)$ est sinusoïdal et de même pulsation ω . Établir l'équation différentielle du mouvement de B dans \mathcal{R}' .
 - Pour la résoudre, on pose $\underline{Z} = Z_0 e^{i\omega t}$, $\underline{z} = z_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$ et $u = \frac{\omega}{\omega_0}$. Déterminer l'expression de l'amplitude complexe \underline{z}_0 en fonction de Z_0 et u , puis de son module z_0 .

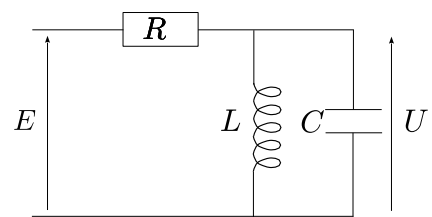
On a tracé ci-dessous le graphe représentant $\frac{z_0(u)}{Z_0}$. Commenter la courbe obtenue.



(d) Que se passerait-il en l'absence d'amortisseur ($\lambda = 0$) ? Conclure.

4 Régime sinusoïdal en électricité

Les systèmes électroniques sont régulièrement soumis à des tensions sinusoïdales et peuvent, à l'image des oscillateurs mécaniques, être étudiés dans le cadre des oscillations forcées. Considérons le circuit ci-contre, excité par un générateur sinusoïdal de tension : $E(t) = E_m \cos(\omega t)$.



On peut montrer que la réponse en tension $U(t)$ du circuit vérifie l'équation différentielle suivante :

$$RC\ddot{U} + \dot{U} + \frac{R}{L}U = \dot{E}$$

qui devient, en posant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$:

$$\frac{R}{L\omega_0^2}\ddot{U} + \dot{U} + \frac{R}{L}U = \dot{E}$$

1. En régime forcé, $U(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$. Montrer que l'amplitude complexe \underline{U}_m s'exprime sous la forme :

$$\underline{U}_m = \frac{E_m}{1 + j\frac{R}{L\omega_0} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

2. Exprimer les valeurs asymptotiques de l'amplitude U_m pour $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow \infty$. Pour quelle pulsation observe-t-on une résonance ? Que vaut $U_{m,max}$?

3. Déterminer φ pour $\omega = \omega_0$.

4. La bande passante correspond au domaine de pulsations $[\omega_1, \omega_2]$ à l'intérieur duquel $U_m \geq \frac{U_{m,max}}{\sqrt{2}}$. Évaluer la largeur $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ de la bande passante