TD EM8b - Réflexion d'une onde électromagnétique sur un plan conducteur parfait

1 Guide d'ondes ⋆⋆

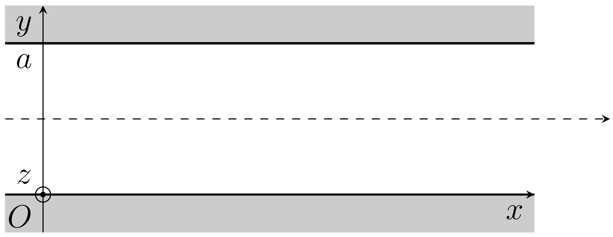
Un guide d'onde est constitué de deux plans parfaitement conducteurs situés en $y = 0$ et $y = a$ entre lesquels est guidée une onde électromagnétique de la forme

$$\underline{\vec{E}} = \left[Ae^{\mathrm{i}k_2y} + Be^{-\mathrm{i}k_2y}\right] e^{\mathrm{i}(\omega t - k_1x)}\vec{u}_z \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Donnée : On rappelle la relation de passage pour le champ électrique à l'interface entre deux milieux 1 et 2,

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to2}$$

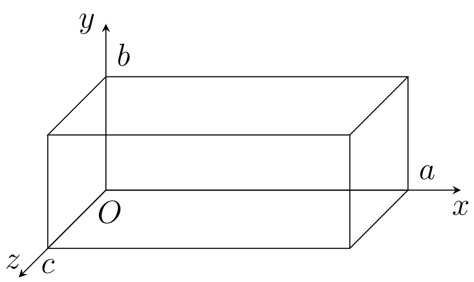
avec $\vec{n}_{1\to2}$ le vecteur unitaire normal orienté de 1 vers 2.



1. L'expression de $\underline{\vec{E}}$ fournie est-elle en accord avec l'équation de Maxwell-Gauss dans le vide ?
2. Montrer que cette onde est une superposition de deux ondes planes progressives harmoniques (OPPH) dont on précisera les vecteurs d'onde notés $\vec{k}_\pm$. Représenter ces deux vecteurs.
3. Que valent les champs électrique et magnétique dans un conducteur parfait ? En utilisant les conditions aux limites en $y = 0$ et en $y = a$ pour le champ électrique, établir une relation entre A et B et une condition sur k_2 dépendant d'un entier n.
4. Déterminer l'inclinaison $\theta_\pm$ des deux OPPH avec l'axe du guide en fonction de leur longueur d'onde λ et a.
5. En déduire une inégalité sur λ, pour n donné.
6. En déduire, pour une valeur de n donnée, la pulsation minimale des ondes pouvant se propager dans le guide.
7. Donner l'expression finale du champ $\underline{\vec{E}}$ puis du champ réel $\vec{E}$ pour une valeur de n donnée. Commenter sa structure dans les directions x et y.

2 Champ électromagnétique dans une cavité ⋆⋆⋆

On considère une cavité parallélépipédique de côtés ($x = a$, $y = b$, $z = c$) à parois parfaitement conductrices.



On souhaite déterminer les différents modes propres pouvant exister à l'intérieur de cette cavité.

On donne, dans un repère orthonormé $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$:

$$\vec{E_0}(E_1, E_2, E_3)$$

$$\vec{k}(k_1, k_2, k_3)$$

On cherche les composantes du vecteur $\overrightarrow{E}$ sous la forme :

$$\begin{aligned}
E_x &= E_1 \cos(k_1 x + \varphi_1)\ \sin(k_2 y + \varphi_2)\ \sin(k_3 z + \varphi_3) \sin(\omega t) \\
E_y &= E_2 \sin(k_1 x + \varphi_1)\ \cos(k_2 y + \varphi_2)\ \sin(k_3 z + \varphi_3) \sin(\omega t) \\
E_z &= E_3 \sin(k_1 x + \varphi_1)\ \sin(k_2 y + \varphi_2)\ \cos(k_3 z + \varphi_3) \sin(\omega t)
\end{aligned}$$

1. Rappeler l'équation de Maxwell-Gauss vérifiée par le champ électrique dans le vide. En déduire une relation entre E_1, E_2, E_3, k_1, k_2, et k_3.
2. Montrer que, dans le vide, $\vec{E}$ vérifie l'équation de propagation de d'Alembert.
3. Rappeler les conditions aux limites aux parois que doivent vérifier les composantes (tangentielle ou normale) du champ électrique.
4. Exprimer ces conditions aux limites au niveau des plans $x = 0$ et $x = a$. En déduire que l'on peut choisir $\varphi_1 = 0$ et que les valeurs k_1 sont de la forme :

$$k_1 = n_1 \frac{\pi}{a} \quad \text{avec } n_1 \in \mathbb{N}$$

5. Par analogie, déduire des conditions aux limites sur les autres parois les valeurs de φ_2 et φ_3, ainsi que les conditions vérifiées par k_2 et k_3 (on introduira les entiers n_2 et n_3).
6. Déduire de l'équation de propagation établie à la question 2, une expression de la pulsation ω du mode caractérisé par les entiers (n_1, n_2, n_3).
7. Donner l'expression des trois composantes E_x, E_y, E_z du champ électrique du mode associé aux entiers (n_1, n_2, n_3).

   Que devient cette expression dans le cas où $n_1 = 2$, $n_2 = 0$ et $n_3 = 3$?
8. Pourquoi un four micro-ondes est-il équipé d'un plateau tournant ?