TD EL2b - Régimes transitoires d'ordre 2

1 Vrai-Faux

		Vrai	Faux
1.	La solution de l'équation homogène d'un système d'ordre 1 a toujours la même forme	☐	☐
2.	La solution de l'équation homogène d'un système d'ordre 2 a toujours la même forme.	☐	☐
3.	La solution particulière de l'équation associée à un système d'ordre 1 (ou d'ordre 2) correspond à la solution du régime permanent.	☐	☐
4.	Si le discriminant de l'équation caractéristique associée à un système du second ordre est positif alors le régime transitoire est pseudo-périodique.	☐	☐
5.	Plus le facteur de qualité est élevé, plus la décroissance des oscillations est faible.	☐	☐

2 Forme canonique

On considère les équations différentielles homogènes (au sens mathématique, c'est à dire sans second membre) suivantes, où R désigne une résistance, C une capacité et L une inductance.

a)	$\ddot{u} + \dfrac{L}{R}\,\dot{u} + \dfrac{1}{LC}\,u = 0$
b)	$\ddot{u} + RC\,\dot{u} + \dfrac{1}{R^2C^2}\,u = 0$
c)	$\ddot{u} + \dfrac{1}{RC}\,\dot{u} + \dfrac{1}{R^2C^2}\,u = 0$
d)	$\ddot{u} + \dfrac{RC}{L}\,\dot{u} + LC\,u = 0$

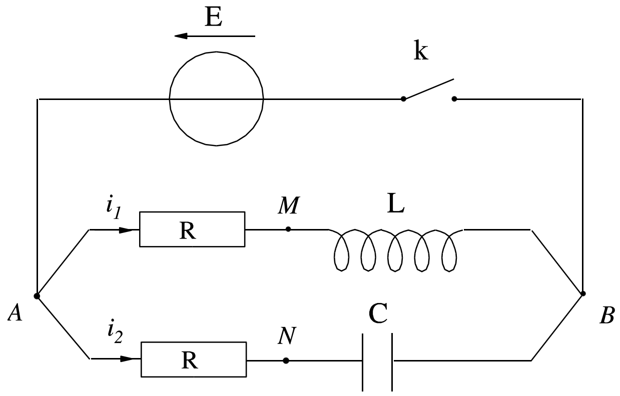
1. Éliminer les équations inhomogènes (au sens physique du terme). On justifiera sa réponse.
2. On cherche à mettre la (ou les) équation(s) retenue(s) sous la forme canonique :

$$\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

   Déterminer les expressions de Q et ω_0 en fonction de R, L ou C pour la (ou les) équation(s) retenue(s).
3. Quelle est la nature du régime transitoire correspondant à l'équation (ou aux équations) retenue(s) ?

3 Régime transitoire

Un générateur de $f.e.m$ $E = 200$ V et de résistance interne négligeable peut alimenter deux branches d'un circuit. La branche AMB a une bobine d'inductance $L = 4,0$ H et de résistance $R = 1,0$ kΩ. La branche ANB a un condensateur de capacité $C = 4,0$ μF et une résistance $R = 1,0$ kΩ. Le condensateur est initialement déchargé.



1. Justifier que le condensateur soit initialement déchargé (on suppose que l'interrupteur est ouvert depuis un temps suffisamment long pour que le régime permanent soit atteint). Que vaut $i_1(0^-)$?

À l'instant $t = 0$ on ferme l'interrupteur k.

2. (a) En vous aidant de vos connaissances du cours, analyser qualitativement (c'est à dire sans calculs) le comportement de ce circuit.
   (b) Donner les expressions $i_1(0^+)$ et $i_2(0^+)$ des intensités i_1 et i_2 juste après la fermeture de l'interrupteur. On justifiera soigneusement les résultats.
   (c) Déterminer les valeurs $i_{1\infty}$ et $i_{2\infty}$ des intensités i_1 et de i_2 lorsque le nouveau régime permanent est atteint. Même question pour u_{C_∞}, valeur de la tension u_C en régime permanent.

3. Établir l'équation différentielle vérifiée par $i_1(t)$. En déduire une expression littérale, puis une expression numérique de $i_1(t)$.

4. Mêmes questions pour $i_2(t)$.

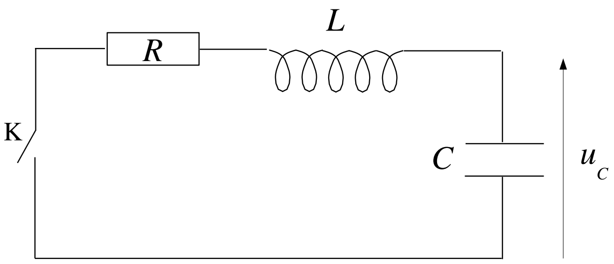
5. Donner les expressions de l'énergie stockée dans le condensateur et de l'énergie stockée dans la bobine lorsque le régime permanent est atteint. On fera les applications numériques.

Le régime permanent précédent étant atteint, on ouvre l'interrupteur k à un instant que l'on choisira désormais comme origine des temps. On pose alors $i = i_1 = -i_2$.

6. (a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par i et donner l'expression littérale puis numérique de $i(t)$ en tenant compte des conditions initiales $\star\star\star$.
   (b) Évaluer la durée du régime transitoire.
   (c) Faire le bilan énergétique. En déduire l'énergie totale dissipée par effet Joule durant cette dernière phase.

4 Étude d'un circuit R, L, C série.

On considère le circuit suivant :



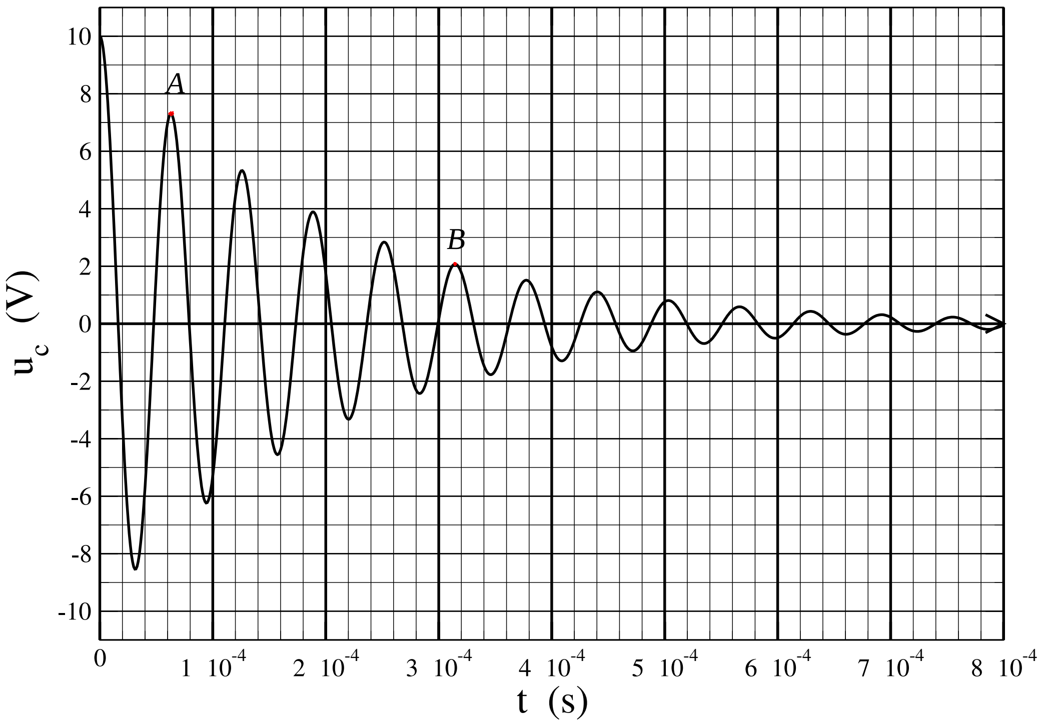
À $t = 0$, $u_C = u_0 = 10$ V et on ferme l'interrupteur K. On donne $L = 10$ mH et $C = 10$ nF.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par u_C pour $t > 0$.
2. Mettre cette équation sous la forme

$$\ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_C + \omega_0^2\, u_C = 0 \qquad (1)$$

   et donner les expressions de ω_0 et Q en fonction de R, L et C.

On recueille le signal aux bornes du condensateur (*cf* figure ci-dessous) :



3. (a) Quelle est la nature du régime transitoire ? Que peut-on en déduire sur la valeur de Q ?
   (b) Donner dans ce cas l'expression complète de la solution de l'équation différentielle (1).
   (c) Définir puis mesurer la valeur de la pseudo-période T des oscillations et la comparer à T_0 période propre du système.
4. On note u_A la valeur de u_C au point A et u_B la valeur de u_C au point B. Montrer que

$$\frac{1}{4}\ln\left(\frac{u_A}{u_B}\right) = \frac{\omega_0 T}{2Q}$$

   Simplifier cette expression en tenant compte de la mesure du 3.c. puis en déduire la valeur de Q (on arrondira cette valeur à l'entier le plus proche). Enfin, calculer la valeur numérique de la résistance R utilisée.