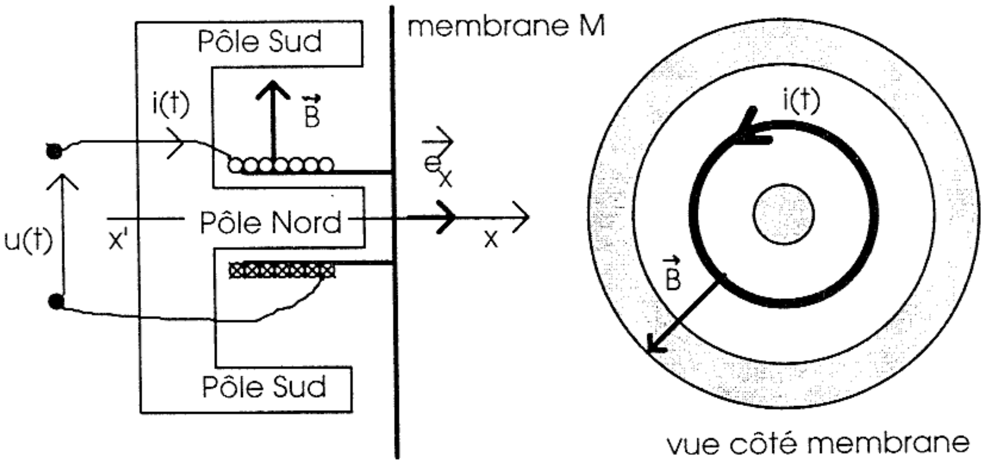
Étude simplifiée d'un haut parleur

Un haut-parleur électrodynamique est constitué

- d'un aimant annulaire, d'axe horizontal $x'x$, créant un champ magnétique $\vec{B}$ radial et de norme constante B dans la région utile de l'entrefer
- d'un solénoïde indéformable de même axe $x'x$ comportant N spires de rayon a placé dans l'entrefer de l'aimant
- d'une membrane M perpendiculaire à l'axe $x'x$ solidaire du solénoïde et pouvant effectuer de faibles déplacement axiaux autour de sa position d'équilibre, grâce à un système élastique que l'on modélise par un ressort unique de raideur k.



L'ensemble mobile {membrane+solénoïde}, de masse m, repéré par l'abscisse $x(t)$ lorsqu'il est en mouvement est soumis aux forces suivantes :

- son poids et la réaction du support verticale et opposée au poids
- la force de rappel du ressort de raideur k
- la résultante des forces de Laplace exercées par l'aimant sur le solénoïde lorsqu'il est parcouru par un courant d'intensité $i(t)$
- d'une force proportionnelle à la vitesse $\vec{F} = -h\dot{x}\,\vec{e}_x$.

A - Établissement de l'équation mécanique

A.1. Faire un schéma, en respectant les orientations données, où figure la force élémentaire $\mathrm{d}\vec{f}_{\mathrm{Lap}}$ s'exerçant sur un petit élément $i\mathrm{d}\vec{\ell}$ de courant du solénoïde.

A.2. En déduire les caractéristique de la résultante $\vec{f}_{\mathrm{Lap}}$ s'exerçant sur l'ensemble du solénoïde (on posera $\ell = 2\pi N a$).

A.3. La position d'équilibre lorsque le solénoïde n'est parcouru par aucun courant est repérée par $x = 0$. Établir l'équation du mouvement liant $x(t)$ et ses dérivées à $i(t)$. On l'appellera EM (équation mécanique).

B - Établissement de l'équation électrique

Le haut parleur est connecté à un amplificateur que l'on considérera comme une source idéale de tension $u(t)$.

Détermination de la f.e.m induite par le mouvement du solénoïde dans $\vec{B}$.

Contrairement au modèle simplifié du haut-parleur par le dispositif des rails de Laplace, il n'est pas possible dans la configuration du haut parleur étudié de calculer la *fem* induite à partir du flux de $\vec{B}$. On peut cependant la retrouver en exploitant le lien entre $\mathscr{P}_{\text{Lap}}$ puissance des forces de Laplace et $\mathscr{P}_{\text{fem}}$ puissance fournie par la f.e.m induite par le mouvement du circuit dans $\vec{B}$ stationnaire.

B.1. Rappeler la relation entre $\mathscr{P}_{\text{Lap}}$ et $\mathscr{P}_{\text{fem}}$. En déduire l'expression de la *fem* induite en fonction de B, v vitesse de la membrane et ℓ longueur totale de l'enroulement.

Équation électrique.

B.2. La bobine a une résistance R et une inductance L. Établir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ en fonction de $u(t)$, $v(t)$ vitesse de la membrane et des paramètres B, ℓ, L R du haut parleur. On l'appellera EE (équation électrique).

C - Fonctionnement en régime sinusoïdal permanent

La source idéale délivrant une tension sinusoïdale $u(t) = U \cos \omega t$, on se propose d'étudier le régime sinusoïdal permanent. On associe à $u(t)$ la notation complexe $\underline{u}(t) = U\, e^{j\omega t}$. On cherche alors $i(t)$ et $v(t)$ sous les formes complexes associées :

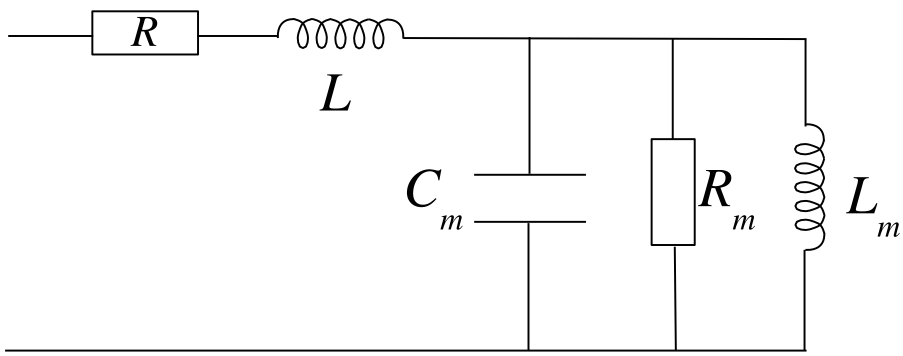
$$\underline{i}(t) = I\, e^{(j\omega t + \varphi)} = \underline{I}\, e^{j\omega t} \qquad \underline{v}(t) = V\, e^{(j\omega t + \psi)} = \underline{V}\, e^{j\omega t}$$

C.1. En utilisant l'équation mécanique, exprimer $\underline{V}$ en fonction de $\underline{I}$.

C.2. En utilisant l'équation électrique, établir la relation entre $\underline{U}$ et $\underline{I}$ que l'on mettra sous la forme $\underline{U} = \underline{Z}\underline{I}$.

C.3. Montrer que l'on peut mettre $\underline{Z}$ sous la forme $\underline{Z} = R + jL\omega + \underline{Z}_m$ où $\underline{Z}_m$ représente l'impédance motionnelle du haut-parleur.

C.4. Exprimer l'admittance motionnelle $\underline{Y}_m = 1/\underline{Z}_m$ et montrer qu'elle correspond au schéma électrique équivalent du haut-parleur indiqué sur la figure ci dessous. En déduire les expressions de R_m, C_m et L_m en fonction de B, ℓ, h, k et m.



Application numérique : Calculer R_m, C_m et L_m pour $B = 1,0$ T, $\ell = 5,0$ m, $k = 1,5.10^3$ N.m^{-1}, $m = 7,0$ g et $h = 6,25$ N.s.m^{-1}.

Dans toute la suite du problème, on se place dans la gamme de fréquences des sons audibles, c'est à dire entre 20 Hz et 20 kHz, pour lesquels $L\omega \ll R$. **On pourra donc négliger $L\omega$ devant R dans toute la suite du problème.**

D - Domaine de fonctionnement optimal du haut-parleur

On souhaite déterminer le domaine de fréquence où le fonctionnement du haut-parleur sera optimal. Pour obtenir une bonne restitution du son, le haut-parleur doit émettre une puissance acoustique indépendante de la fréquence.

Réponse en vitesse.

On peut, à l'aide des résultats précédents, établir la fonction de transfert donnant la réponse en vitesse en fonction de la tension appliquée. On obtient l'expression suivante :

$$\frac{\underline{V}}{\underline{U}} = -\frac{\frac{R_m}{B\ell(R+R_m)}}{1 + jR_cC_m\omega + \frac{R_c}{jL_m\omega}} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{R_c} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_m}$$

que l'on peut ensuite écrire sous forme canonique :

$$\frac{\underline{V}}{\underline{U}} = -\frac{A}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega})} = -\frac{A}{1 + jQ(\frac{f}{f_1} - \frac{f_1}{f})}$$

D.1. Donner les expressions de A, Q, ω_1 et f_1 ainsi que leur valeurs numériques. On prendra $R = 4\ \Omega$. Quelle est la nature de ce filtre ?

On donne en annexe le diagramme de Bode $G_{1\text{dB}} = 20\log(V/U) = 10\log(V^2/U^2)$ en fonction de $\log(f)$.

D.2. Vérifier la nature du filtre.

Réponse acoustique

Une modélisation acoustique grossière permet de trouver la puissance acoustique moyenne $\mathscr{P}_{\text{ac}}$ rayonnée en fonction de la fréquence et de la vitesse de vibration de la membrane. On admettra que :

$$\mathscr{P}_{\text{ac}} = \frac{BV^2}{1 + \left(\frac{\omega_2}{\omega}\right)^2} = \frac{BV^2}{1 + \left(\frac{f_2}{f}\right)^2}$$

où $\omega_2 = 2\pi f_2$ est la pulsation de coupure du haut-parleur caractéristique de la membrane. Ici $\omega_2 = 10^5$ rad.s^{-1} et $B = 1,3.10^3$ S.I.

On donne le diagramme de Bode $G_{2\text{dB}} = 10\log(\mathscr{P}_{\text{ac}}/V^2)$ en fonction de $\log(f)$.

D.3. Quelle est la nature du filtre ?

Domaine de fonctionnent optimal

On donne le diagramme de Bode correspondant à $G_{dB} = 10\log(\mathscr{P}_{\text{ac}}/U^2)$ en fonction de $\log f$.

D.4. Quel est le lien entre G_{dB}, G_{dB_1} et G_{dB_2} ?

D.5. Évaluer graphiquement le domaine de fréquence correspondant à un fonctionnement optimal du haut-parleur ?

E - Calcul du rendement

Le rendement du haut-parleur est donné par le rapport

$$r = \frac{\text{puissance acoustique rayonnée}}{\text{puissance électrique consommée}}$$

Calculer le rendement du haut-parleur dans la zone de fonctionnement optimal, en faisant pour cette zone l'approximation $\underline{Z} = R = 4\ \Omega$.