Révisions d'analyse vectorielle

Avant d'aborder le dernier chapitre d'électromagnétisme il n'est pas inutile de faire un point des connaissances acquises sur les opérateurs d'analyse vectorielle qui agissent sur des champs scalaires ou des champs vectoriels. Toutes les définitions et les expressions de chaque opérateur dans les différents systèmes de coordonnées sont dans le polycopié d'analyse vectorielle.

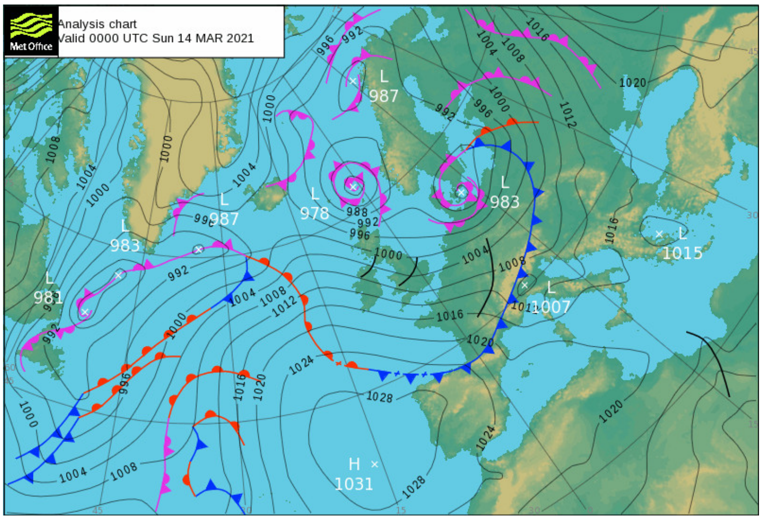
I. Quelques rappels

I.1. Champ scalaire - champ vectoriel

Soit $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ le vecteur position d'un point M (en coordonnées cartésiennes $\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$).

▷ Champ scalaire :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \vec{r} & \longmapsto & f(\vec{r}) \end{array}$$

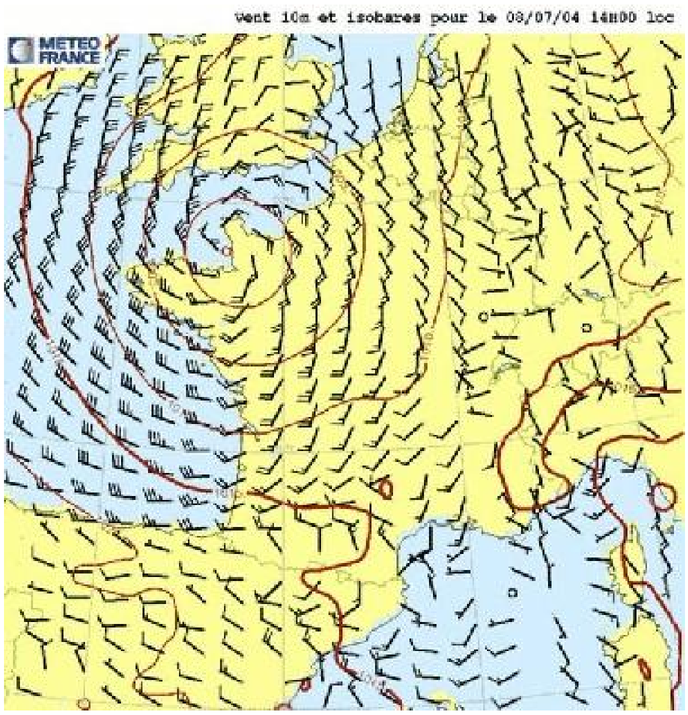


Donner des exemples physiques de champs scalaires :

Champ de température, de pression, de salinité (dans l'océan), de potentiel électrostatique V...

▷ Champ vectoriel :

$$\begin{array}{rccc} \vec{A}: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \vec{r} & \longmapsto & \vec{A}(\vec{r}) \end{array}$$

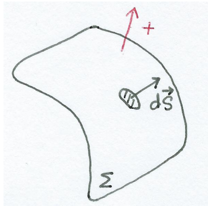


Donner des exemples physiques de champs vectoriels :

Champ de vitesse (pour l'écoulement d'un fluide, voir par exemple une carte des vents en météorologie), champ gravitationnel $\vec{g}$, champ électrique $\vec{E}$, champ magnétique $\vec{B}$...

I.2. Flux d'un champ vectoriel à travers une surface (ouverte ou fermée)

▷ Rappeler la définition du **flux** ϕ d'un champ vectoriel $\vec{A}$ à travers une surface Σ **orientée**.



$$\phi = \iint_\Sigma \vec{A}.\mathrm{d}\vec{S}$$

Comment modifie-t-on la notation lorsque la surface Σ est fermée ?

$$\phi = \oiint_\Sigma \vec{A}.\mathrm{d}\vec{S}$$

▷ Exemples :

☐ En mécanique des fluides on note $\vec{j} = \rho\vec{v}$ le vecteur densité de flux de masse. À quoi correspond le flux de $\vec{j}$ à travers une surface ?

$$D_m = \iint_\Sigma \vec{j}.\mathrm{d}\vec{S} \quad \text{avec } D_m \text{ le débit massique}$$

☐ Rappeler le théorème de Gauss

$$\oiint_\Sigma \vec{E}.\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q^{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0}$$

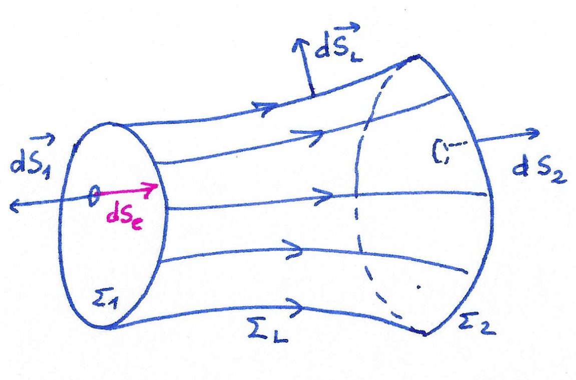
Le flux sortant du champ électrostatique à travers une surface est égal à la charge intérieure divisée par ε_0.

▷ Définir un champ vectoriel à flux conservatif (deux formulations équivalentes).

• Un champ vectoriel $\vec{A}$ est à flux conservatif si et seulement si le flux de $\vec{A}$ à travers toute surface fermée est nul.

$$\oiint_\Sigma \vec{A}.\mathrm{d}\vec{S} = 0$$

• Un champ vectoriel $\vec{A}$ est à flux conservatif si et seulement si le flux de $\vec{A}$ à travers toute section d'un tube de champ se conserve.



Ainsi, si on définit le flux entrant $\phi_e = \iint_{\Sigma_1} \vec{A}.\mathrm{d}\vec{S}_e$ et le flux sortant par $\phi_s = \iint_{\Sigma_2} \vec{A}.\mathrm{d}\vec{S}_2$, on a

$$\phi_e = \phi_s$$

I.3. Circulation d'un champ vectoriel le long d'un circuit (ouvert ou fermé)

▷ Rappeler la définition de la circulation d'un champ vectoriel $\vec{A}$ le long du chemin $\mathscr{C}$ allant du point A au point B.

$$C = \int_{A \atop \mathscr{C}}^{B} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

Comment modifie-t-on la notation lorsque le circuit $\mathscr{C}$ est fermé ?

$$C = \oint_{\mathscr{C}} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

▷ Exemple : rappeler le théorème d'Ampère de la magnétostatique.

$$C = \oint_{\mathscr{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacés}}$$

La circulation du champ magnétostatique le long d'un contour $\mathscr{C}$, fermé, orienté, est égale à la somme algébrique des courants enlacés par ce contour (le sens d'orientation du courant se déduit du sens d'orientation du circuit par la règle de la main droite) multipliée par μ_0.

▷ Définir un champ vectoriel à circulation conservative (deux formulations équivalentes).

• Un champ vectoriel $\vec{A}$ est à circulation conservative si et seulement si la circulation de $\vec{A}$ sur tout contour fermé est nulle.

$$\oint_{\mathscr{C}} \vec{A}.\mathrm{d}\vec{\ell} = 0$$

• Un champ vectoriel $\vec{A}$ est à circulation conservative si et seulement si la circulation de $\vec{A}$ d'un point A à un point B donné est indépendante du chemin suivi de A à B

$$\int_{A \atop \mathscr{C}_1}^{B} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{A \atop \mathscr{C}_2}^{B} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

II. L'opérateur gradient

II.1. Définition

Le gradient est un champ vectoriel qui caractérise les variations spatiales d'un champ scalaire.

Soit f un champ scalaire. Le gradient de f au point M est défini par la relation :

$$\mathrm{d}f(M) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M).\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

Propriétés :

Le vecteur gradient est perpendiculaire aux surfaces iso-f (définies par $f = Cte$) et orienté vers les valeurs de f croissantes.

Expression en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$$

On peut formellement écrire, en utilisant l'opérateur symbolique *nabla* (que l'on n'utilisera qu'en *coordonnées cartésiennes*) :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\,\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{u}_z$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \vec{\nabla}\, f$$

Les expressions du gradient en coordonnées cylindriques et sphériques sont précisées dans le formulaire d'analyse vectorielle. Leurs expressions dans des géométries simples sont cependant à connaître :

- En coordonnées cylindriques, si $f = f(r)$: $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\vec{u}_r$
- En coordonnées sphériques, si $f = f(r)$: $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\vec{u}_r$

II.2. Quelques calculs

▷ Soit le champ scalaire $f(x,y,z) = xy^2 - yz^2$. Calculer $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$.

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f \left| \begin{array}{l} y^2 \\ 2xy - z^2 \\ -2zy \end{array} \right.$$

▷ Soit le champ scalaire $f(x,y,z) = xyz\sin(xy)$. Calculer $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$.

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f \left| \begin{array}{l} yz\sin(xy) + xy^2z\cos(xy) \\ xz\sin(xy) + x^2yz\cos(xy) \\ xy\sin(xy) \end{array} \right.$$

II.3. L'opérateur gradient en physique

a) Électrostatique

Rappeler le lien entre le champ électrostatique $\vec{E}$ et le potentiel électrostatique V.

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$$

Calculer la circulation de $\vec{E}$ le long d'une ligne reliant le point A au point B :

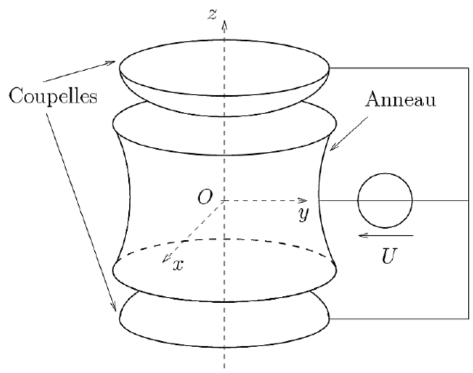
$$\int_A^B \vec{E}.\mathrm{d}\vec{\ell} = = \int_A^B -\overrightarrow{\text{grad}}\, V.\mathrm{d}\vec{\ell} = \int_A^B -\mathrm{d}V = V(A) - V(B)$$

Quelle remarque peut-on faire ?

La circulation est indépendante du chemin suivi : le champ $\vec{E}$ est à circulation conservative.

▷ Piège de Paul

Le piège de Paul est un dispositif permettant de piéger des ions. Il est notamment utilisé dans les horloges de très haute précision.
Il est constitué d'une électrode latérale en anneau portée au potentiel $+U/2$ et de deux électrodes supérieures et inférieures (coupelles) distantes de $2z_c$ et portées au potentiel $-U/2$.
Le potentiel électrostatique créé par ce dispositif a pour expression :

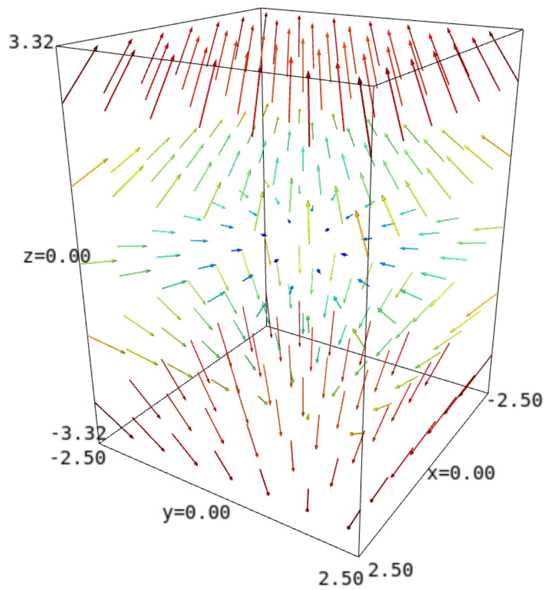


$$V(x,y,z) = \frac{U}{4z_c^2}(x^2+y^2-2z^2)$$

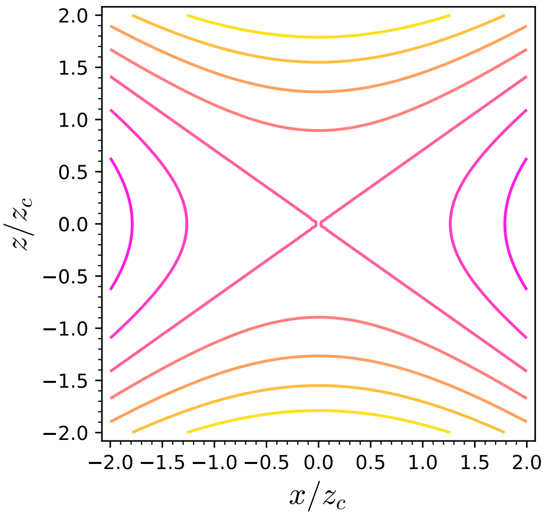
☐ Déterminer l'expression du champ électrostatique.

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V = -\frac{U}{4z_c^2}\left|\begin{array}{l}2x\\2y\\-4z\end{array}\right. = \frac{U}{2z_c^2}\left|\begin{array}{l}-x\\-y\\2z\end{array}\right.$$

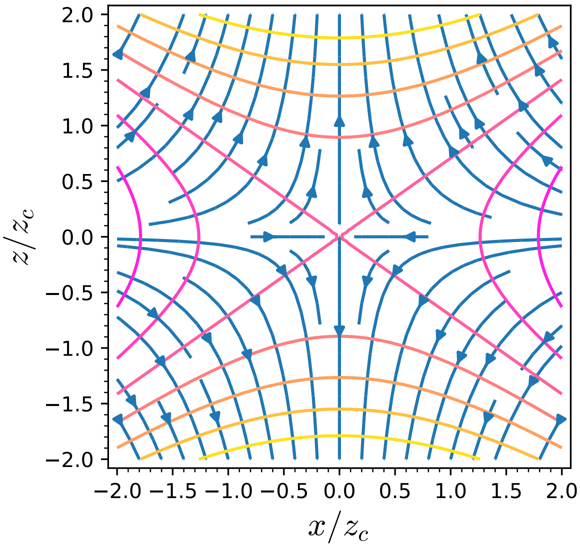
☐ On a représenté l'allure du champ électrique en des points proches de O et situés, soit sur l'axe Oz, soit dans le plan xOy. Ce dispositif seul permettrait-il de stocker des ions ?



Visualisation du champ $\vec{E}$.



Visualisation des isopotentielles dans le plan $y=0$ (valable dans tout plan contenant l'axe Oz car les éléctrodes sont invariantes par rotation quelconque autour de Oz) : les électrodes coïncident avec des surfaces isopotentielles ($V=U/2$ et $V=-U/2$)



Superposition des isopotentielles et des lignes de champ électrostatique orientées dans le sens des potentiels décroissants.

Considérons un ion de charge $q > 0$. Il est soumis a une force $\vec{F} = q\vec{E}$ (le poids est négligeable). Le champ électrique est nul en O : le point O correspond à une position d'équilibre. Si l'ion de déplace légèrement dans le plan horizontal $z = 0$, la force $\vec{F} = q\vec{E}$ de même sens que $\vec{E}$ pour $q > 0$ tend à le ramener vers O. Par contre, si l'ion se déplace verticalement la force $\vec{F} = q\vec{E}$ tend à l'éloigner davantage de O : la position d'équilibre est instable verticalement.

Pour un ion négatif on observerait une instabilité dans le plan horizontal. Ainsi, le dispositif en l'état ne permet pas de stoker un ion.

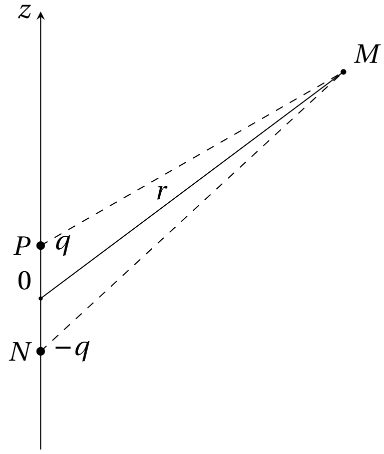
Pour palier ce problème il faut inverser régulièrement la tension pour que l'ion puisse être maintenu dans le piège. La tension U appliquée est en fait une tension alternative dont il faut ajuster la fréquence pour stabiliser la position d'équilibre.

▷ Dipôle électrostatique

Une molécule est électriquement neutre. Cependant, certains atomes attirent davantage les électrons que d'autres (on dit qu'ils sont plus électronégatifs). On peut alors modéliser une molécule par deux charges opposées $+q$ et $-q$ distantes de a.

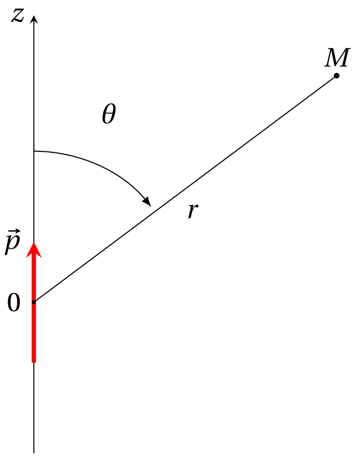
On cherche à exprimer le potentiel puis le champ électrostatique crée par cette distribution à une distance $r \gg a$.

On pose $\vec{p} = qa\,\vec{u}_z = p\vec{u}_z$. Ce vecteur $\vec{p}$ est appelé moment dipolaire.



☐ Donner l'expression du potentiel électrostatique $V(M)$ créé au point M par les deux charges en fonction de q, PM,NM, et ε_0. On suppose le potentiel nul à l'infini.

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 PM} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 NM} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM}\right)$$



On suppose $r \gg a$. On peut montrer, à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 en a/r que le potentiel a pour expression approchée, en coordonnées sphériques :

$$V(M) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

☐ Représenter sur le schéma ci-dessus, les vecteurs $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\varphi$ des coordonnées sphériques.

☐ À l'aide de votre formulaire d'analyse vectorielle, déterminer les composantes E_r, E_θ et E_φ du champ électrostatique.

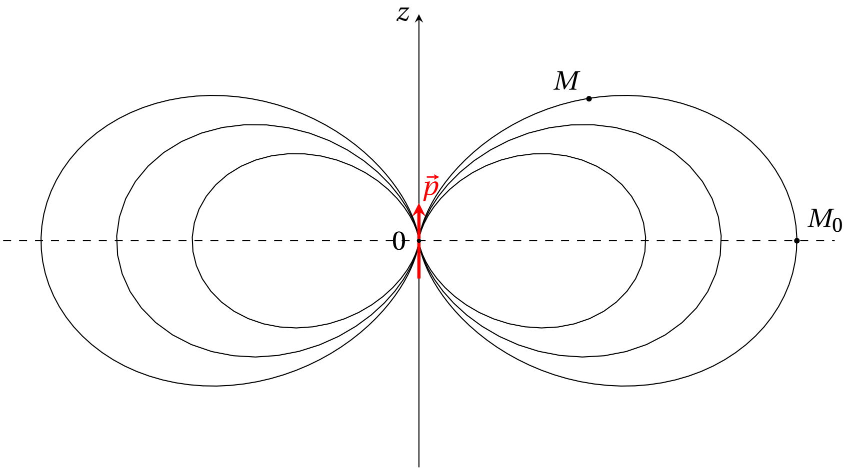
$$E_r = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right) = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}; \quad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right) = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}; \quad E_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right) = 0$$

Retrouver directement la valeur de E_φ en utilisant les propriétés de symétrie de la distribution.

Tout plan contenant Oz est plan de symétrie de la distribution. Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est plan de symétrie pour la distribution donc $\vec{E}(M) \in (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $E_\varphi = 0$.

- ☐ On a représenté sur la figure ci-dessous quelques lignes de champ électrique. Préciser l'orientation des lignes de champ. Représenter l'allure du champ $\vec{E}$ en M et en M_0. Par des considérations de symétrie, retrouver la direction du champ électrostatique dans le plan $z = 0$.

  Le plan $z = 0$ est plan d'anti-symétrie pour la distribution. Soit M_0 un point quelconque appartenant à ce plan : $\vec{E}(M_0)$ est perpendiculaire au plan $z = 0$.



b) Mécanique

On considère un champ de force conservative $\vec{F}$ qui dérive d'une énergie potentielle E_p.

▷ Exprimer le travail élémentaire δW de cette force :

$$\delta W = \vec{F}.\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -\mathrm{d}E_p$$

▷ Donner le lien mathématique entre $\vec{F}$ et E_p :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, E_p$$

▷ En déduire l'expression du travail de A à B de la force $\vec{F}$.

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \int_A^B -\mathrm{d}E_p = E_p(A) - E_p(B)$$

▷ Citer des forces conservatives et donner l'énergie potentielle associée.

- Poids $m\vec{g}$ associé à l'énergie potentielle de pesanteur :
  - $E_p(z) = mgz + cte$ avec $z \uparrow$
  - $E_p(z) = -mgz + cte$ avec $z \downarrow$
- Force élastique $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_{\text{ext}}$ associée à l'énergie potentielle élastique :

$$E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + cte \text{ (on choisit en général } cte = 0).$$

- Force $\vec{F} = q\vec{E}$ qui s'exerce sur une charge q placée dans un champ électrostatique $\vec{E}$, associée à l'énergie potentielle :

$$E_p = qV.$$

  où V est est le potentiel électrostatique dont dérive le champ $\vec{E}$.

c) Statique des fluides

On considère un volume mésoscopique dV de fluide à l'équilibre dans un référentiel galiléen et soumis à un champ de pesanteur $\vec{g}$.

▷ À quoi correspond $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\,\mathrm{d}V$? Interpréter physiquement le signe "−".

$-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\mathrm{d}V$ représente la résultante des forces de pression s'exerçant sur le volume mésoscopique dV.

Le signe "−" devant le gradient indique que cette force est dirigée des hautes pressions vers les basses pressions.

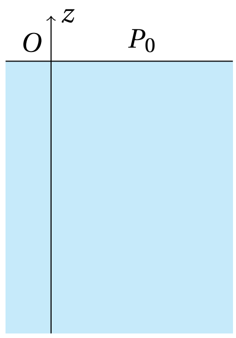
▷ Exprimer la condition d'équilibre de ce volume mésoscopique et en déduire la loi de la statique des fluides.

Loi de la statique des fluides :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p = \rho\vec{g}$$

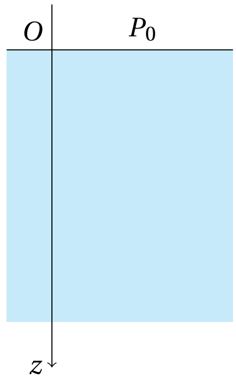
voir cours MF1.

▹ Retrouver l'expression du champ de pression dans un fluide incompressible dans les différentes configurations suivantes.



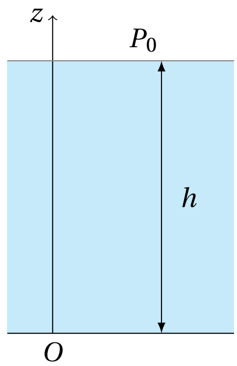
(a)

$P(z) = P_0 - \rho g z$



(b)

$P(z) = P_0 + \rho g z$



(c)

$P(z) = P_0 + \rho g (h - z)$

voir cours MF1.

▷ Retrouver l'expression du champ de pression dans une atmosphère isotherme de température T_0, en rappelant les hypothèses utilisées. On note P_0 la pression à l'altitude nulle.

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mg}{RT_0}z\right)$$

voir cours MF1.

d) Diffusion thermique

Rappeler la loi de Fourier.

$$\vec{j}_{cd} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T$$

III. L'opérateur divergence

III.1. Définition

On admet le **théorème d'Ostrogradski** : soit $\vec{A}(M)$ un champ vectoriel; il existe un unique champ scalaire $\operatorname{div}\vec{A}$ tel que, pour toute surface fermée $\mathscr{S}$, orientée vers l'extérieur, limitant le volume $\mathscr{V}$:

$$\Phi = \oiint_{\mathscr{S}} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\mathscr{V}} \operatorname{div}\vec{A}\,\mathrm{d}V$$

Si on fait tendre le volume $\mathscr{V}$ vers 0, on obtient pour un volume élémentaire $\mathrm{d}V$:

$$\mathrm{d}\Phi = \operatorname{div}\vec{A}\,\mathrm{d}V$$

Expression en coordonnées cartésiennes :

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Notation à l'aide de l'opérateur *nabla* :

$$\operatorname{div}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

Les expressions de la divergence en coordonnées cylindriques et sphériques sont précisées dans le formulaire d'analyse vectorielle.

▷ Donner la définition locale d'un champ vectoriel $\vec{A}$ à flux conservatif.

Un champ vectoriel $\vec{A}$ est à flux conservatif si et seulement si $\operatorname{div}\vec{A} = 0$.

III.2. Quelques calculs

▷ On considère le champ vectoriel $\vec{A} = \alpha\vec{r} = \alpha(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

☐ Représenter l'allure du champ vectoriel dans le cas $\alpha > 0$.

On remarque que $\vec{A} = \alpha r\vec{u}_r$ en coordonnées sphériques. Le champ vectoriel $\vec{A}$ est radial. Il diverge de O si $\alpha > 0$. Sa norme augmente proportionnellement à r.

☐ Calculer $\operatorname{div}\vec{A}$.

$$\operatorname{div}\vec{A} = 3\alpha$$

☐ Vérifier la validité du théorème d'Ostrogradski dans ce cas particulier en choisissant une surface $\mathscr{S}$, sphérique de centre O et de rayon r.

$$\oiint_{\mathscr{S}} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \alpha r \times 4\pi r^2 = \alpha \times 4\pi r^3$$

$$\iiint_{\mathscr{S}} \operatorname{div}\vec{A}\,\mathrm{d}V = 3\alpha\frac{4}{3}\pi r^3 = \alpha\times 4\pi r^3$$

III.3. L'opérateur divergence en physique

a) En mécanique des fluides

▷ Exprimer localement la conservation du débit de masse pour un écoulement stationnaire.

$$\operatorname{div}\vec{j} = 0$$

avec $\vec{j}$ le vecteur densité de flux de masse.

▷ Que représente physiquement $\operatorname{div}\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse d'écoulement du fluide ?

$\operatorname{div}\vec{v}$ représente le taux de dilation des particules fluides en écoulement (c'est à dire la variation relative de volume par unité de temps). Lorsque les particules fluides conservent leur volume lors de l'écoulement (elles peuvent cependant se déformer) on a $\operatorname{div}\vec{v} = 0$. L'écoulement est dit incompressible.

▷ Comment se traduit macroscopiquement la propriété locale $\operatorname{div}\vec{v} = 0$?

Si $\operatorname{div}\vec{v} = 0$, $\vec{v}$ est à flux conservatif et il y a conservation du débit volumique.

b) Électromagnétisme

▷ Donner l'expression locale du théorème de Gauss (équation de Maxwell-Gauss). Que devient cette expression dans le vide ?

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Dans le vide, $\rho = 0$,

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0$$

le champ $\vec{E}$ est à flux conservatif.

▷ Le champ magnétique $\vec{B}$ est à flux conservatif. Donner une formulation locale de cette propriété (équation de Maxwell-flux).

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0$$

▷ Rappeler l'expression locale de conservation de la charge (voir cours EM3) à trois dimensions.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0$$

IV. L'opérateur rotationnel

IV.1. Définition

On admet le **théorème de Stokes** : soit $\vec{A}(M)$ un champ vectoriel ; il existe un unique champ vectoriel $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$ tel que, pour toute surface $\mathscr{S}$ s'appuyant sur le contour fermé $\mathscr{C}$, $\mathscr{S}$ étant orientée par le sens de parcours choisi sur $\mathscr{C}$:

$$C = \oint_{\mathscr{C}} \vec{A}.\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \iint_{\mathscr{S}} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}.\mathrm{d}\vec{S}$$

Si on fait tendre la surface délimitée par le contour $\mathscr{C}$ vers 0, on obtient

$$\mathrm{d}C = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

Expression en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z$$

Notation à l'aide de l'opérateur *nabla* :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$$

Les expressions du rotationnel en coordonnées cylindriques et sphériques sont précisées dans le formulaire d'analyse vectorielle.

▷ Donner la définition locale d'un champ vectoriel $\vec{A}$ à circulation conservative.

Un champ vectoriel $\vec{A}$ est à circulation conservative si et seulement si $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \vec{0}$.

IV.2. Quelques calculs

▷ Vérifier la propriété suivante

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{grad}}\,f) = \vec{0}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

On admet le théorème de Shwarz : pour une fonction de classe C^2, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$.

Conséquence : tout champ vectoriel s'écrivant sous la forme $\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}\,f$ est à circulation conservative. On admet la réciproque : tout champ vectoriel à circulation conservative peut s'écrire sous la forme $\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}\,f$.

▷ Vérifier la propriété suivante :

$$\text{div}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}) = 0$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z$$

$$\begin{aligned}\text{div}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}) &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z\partial y} \\ &= \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial z}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

en utilisant à nouveau le théorème de Shwarz.

IV.3. L'opérateur rotationnel en physique

a) En mécanique des fluides

▷ Rappeler l'expression du champ de vitesse $\vec{v}(M)$ pour un solide en rotation à la vitesse angulaire ω autour d'un axe Oz fixe dans le référentiel d'étude .

$$\vec{v}(M) = \omega r \vec{u}_\theta \text{ en coordonnées cylindriques}$$

▷ Calculer $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,v = \frac{1}{r}\frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r}\vec{u}_z = 2\omega\vec{u}_z$$

▷ En mécanique des fluides on pose $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}$. Que représente physiquement ce vecteur ?

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,v = \omega\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{v}(M) = \vec{\Omega}\wedge\vec{OM}$$

Le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ traduit localement la rotation des particules fluides.

b) En électromagnétisme

▷ Donner une formulation locale du théorème d'Ampère (équation de Maxwell-Ampère de la statique).

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}$$

▷ On considère une distribution de courants telle que, pour $-a/2 \leqslant z \leqslant a/2$, le champ magnétique créé a pour expression $\vec{B} = \mu_0 j z \vec{u}_y$ avec j constant. Déterminer le vecteur densité volumique de courant pour $-a/2 \leqslant z \leqslant a/2$.

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = -j\vec{u}_x$$

On s'intéresse à présent à un opérateur faisant intervenir des dérivées spatiales d'ordre 2.

V. L'opérateur laplacien scalaire

V.1. Définition

Soit f un champ scalaire. On définit le **laplacien scalaire** Δf par

$$\Delta f = \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f)$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Notation à l'aide de l'opérateur *nabla* : $\Delta f = \nabla^2 f$

V.2. L'opérateur laplacien en physique

- En électrostatique, le champ électrique est à circulation conservative. Le champ électrostatique vérifie donc la loi locale :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E} = \vec{0}$$

- On introduit donc un potentiel électrostatique V tel que

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V$$

- L'équation de Maxwell-Gauss dans le vide donne :

$$\mathrm{div}\, \vec{E} = 0$$

- En déduire l'équation vérifiée par le potentiel V dans le vide (équation de Laplace)

$$\Delta V = 0$$

V.3. Calcul

- Vérifier que $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V) = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

V.4. Interprétation

a) Dérivée seconde d'une fonction à une variable

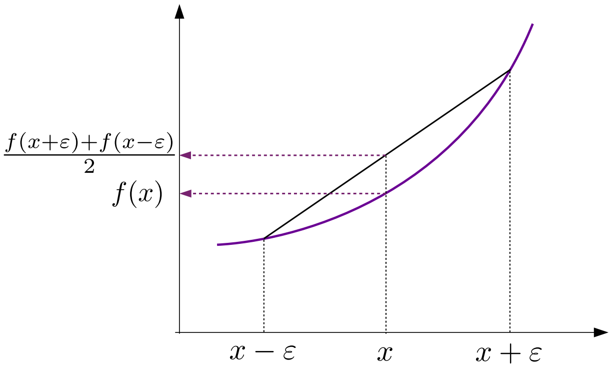
Pour des fonctions à une seule variable (cas 1D) le laplacien se réduit à la dérivée seconde de la fonction $\Delta f = \dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = f''(x)$.

Supposons qu'une fonction admette un extremum en $x = x_0$: $f'(x_0) = 0$. Le signe de la dérivée seconde $f''(x_0)$ donne une indication sur la concavité de la courbe au niveau de l'extremum.

$f''(x_0) > 0$ $\qquad$ $f''(x_0) < 0$

Plaçons nous en un point quelconque (pas nécessairement un extremum).
Considérons l'intervalle $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ au voisinage de x.

On cherche à estimer l'écart entre la valeur moyenne des valeurs prises par la fonction aux bornes de l'intervalle et la valeur en x : $\frac{f(x+\varepsilon)+f(x-\varepsilon)}{2} - f(x)$ (voir figure ci-dessous).



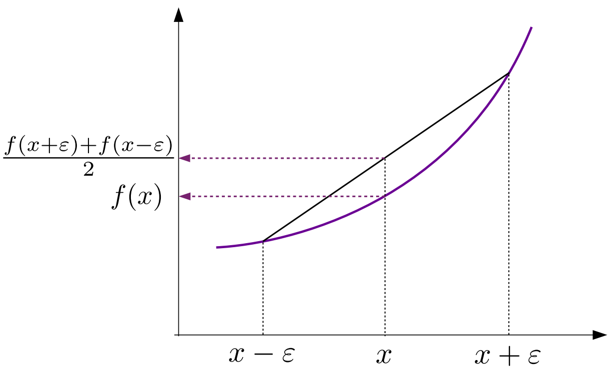
À l'aide de développements limités à l'ordre 2 estimer cet écart.

$$\frac{f(x+\varepsilon)+f(x-\varepsilon)}{2} - f(x) = \frac{f(x) + \cancel{\varepsilon f'(x)} + \frac{\varepsilon^2}{2}f''(x) + (f(x) - \cancel{\varepsilon f'(x)} + \frac{\varepsilon^2}{2}f''(x))}{2} - f(x)$$

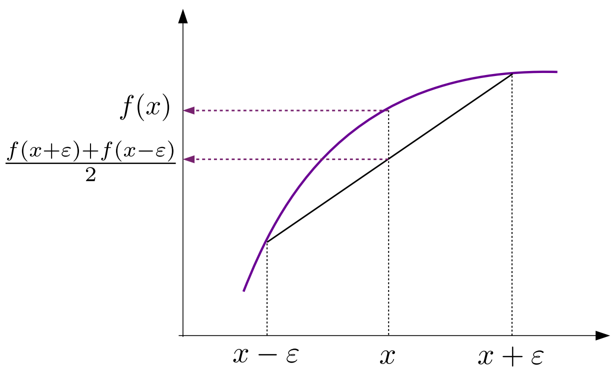
$$= f(x) + \frac{\varepsilon^2}{2}f''(x) - f(x)$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{2}f''(x)$$

ainsi :



$f''(x) > 0$



$f''(x) < 0$

Lorsque $\Delta f = f''(x) > 0$ les valeurs prises en moyenne par la fonction sur un voisinage de x sont supérieures à $f(x)$.
Lorsque $\Delta f = f''(x) < 0$ les valeurs prises en moyenne par la fonction sur un voisinage de x sont inférieures à $f(x)$.

b) Transposition à trois dimensions

On considère un point M ou un champ scalaire f admet un minimum local. Tracer les lignes de champ de $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ au voisinage du point M. En déduire $\Delta f = \text{div}\,(\overrightarrow{\text{grad}}\, f) > 0$.

Faire le même raisonnement lorsque f admet un maximum en M.

En reprenant l'exemple du piège de Paul, justifier pourquoi un champ électrostatique seul ne peut pas piéger une charge.

Supposons que l'on souhaite piéger un ion positif. Il faudrait pour cela que les lignes de champs électriques convergent toutes vers O. Cela suppose l'existence d'un minimum du potentiel V en 0 et donc $\Delta V(0) > 0$ ce qui est impossible puisque dans le vide $\Delta V = 0$: le potentiel électrostatique n'admet pas d'extremum (voir cours EM2 cage de Faraday).