Th9 - Conduction thermique

Un des moyens de freiner le réchauffement climatique est, entre autres, de limiter la consommation d'énergie de chauffage des habitations. Pour cela il faut utiliser des matériaux isolants. Nous allons nous intéresser de plus près aux transferts d'énergie thermique, afin de les quantifier.

I. Généralités sur les transferts thermiques

I.1. Rappel : les différents modes de transfert (voir cours Th4 V.1.)

a) Conduction thermique

C'est essentiellement ce mode de transfert d'énergie qui sera traité dans ce chapitre. Il s'effectue à l'échelle microscopique dans un milieu macroscopiquement au repos.
L'énergie cinétique microscopique est transmise de proche en proche à l'échelle microscopique des zones chaudes (où l'agitation thermique est importante) vers les zones plus froides (où l'agitation thermique est moindre).

b) Convection

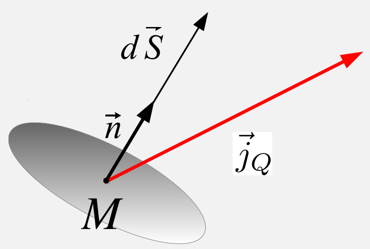
La convection permet un transport d'énergie par la mise en mouvement (naturelle ou forcée) d'un fluide (liquide ou gaz). Dans ce chapitre, ce phénomène sera pris en compte à l'interface solide-fluide.

c) Rayonnement

Ce troisième mode de transfert peut s'effectuer dans le vide puisqu'il s'agit d'un rayonnement électromagnétique émis par tout corps chauffé (voir image infra-rouge d'une habitation, lumière visible émise par le Soleil)...

I.2. Flux thermique

a) Vecteur densité de flux thermique



On définit $\vec{j}_Q$ le **vecteur densité de flux thermique** par

$$\delta Q = \vec{j}_Q.\mathrm{d}\vec{S}\,\mathrm{d}t$$

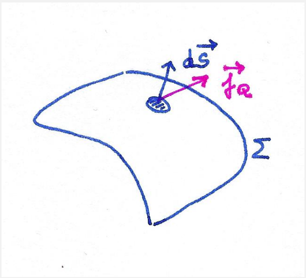
avec δQ l'énergie thermique ayant traversé dS pendant dt, et comptée positivement dans le sens d'orientation choisi.

Dimensionnellement $[||\vec{j}_Q||] =$ J.s^{-1}.m^{-2} $=$ W.m^{-2}.

$$\mathrm{d}\phi = \vec{j}_Q.\mathrm{d}\vec{S} = \frac{\delta Q}{\mathrm{d}t}$$

Le flux élémentaire dϕ de $\vec{j}$ à travers la surface dS correspond à la puissance thermique transmise à travers cette surface et a pour unité SI le watt (W).

b) Flux thermique à travers une surface



Le **flux thermique** total à travers la surface Σ orientée a pour expression :

$$\phi = \iint_\Sigma \vec{j}_Q.\mathrm{d}\vec{S} = \frac{\delta Q_\Sigma}{\mathrm{d}t}$$

avec δQ_Σ l'énergie thermique ayant traversé la surface Σ pendant dt, et comptée positivement dans le sens d'orientation choisi ($[\phi] =$ W).

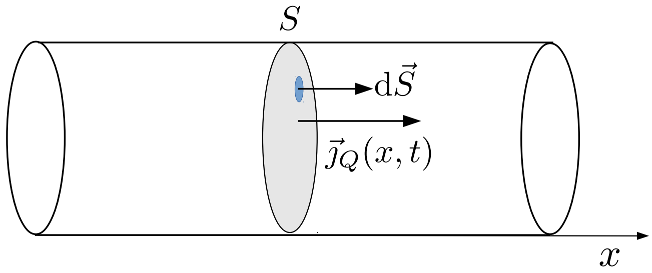
Le **flux thermique** ϕ correspond à la **puissance thermique** transmise à travers la surface Σ.

c) Cas particulier d'un flux uniforme 1D axial

On suppose le vecteur densité de flux thermique de la forme : $\vec{j}_Q = j_Q(x,t)\vec{u}_x$

On calcule le flux thermique à travers une surface S perpendiculaire à $\vec{u}_x$: le vecteur densité de flux thermique est donc **uniforme** sur toute cette surface et **normal** à cette surface.

$$\begin{aligned}\phi &= \iint_S \vec{j}_Q.\mathrm{d}\vec{S} \\ &= \iint_S j_Q(x,t)\mathrm{d}S \\ &= j_Q(x,t)\iint_S \mathrm{d}S \\ &= j_Q(x,t)S\end{aligned}$$



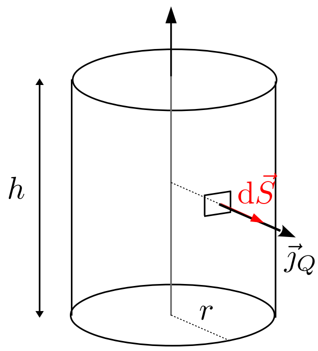
$$\boxed{\phi(x,t) = j_Q(x,t)S}$$

d) Cas particulier d'un flux radial en cylindrique

On considère un problème à symétrie cylindrique. Dans ce cas, le vecteur densité de flux thermique est de la forme : $\vec{j}_Q = j_Q(r,t)\vec{u}_r$ en coordonnées cylindriques.

On calcule le flux thermique à travers une surface S cylindrique de rayon r et de hauteur h : le vecteur densité de flux thermique est normal à cette surface et possède une norme constante sur toute cette surface.

$$\begin{aligned}\phi &= \iint_S \vec{j}_Q.\mathrm{d}\vec{S} \\ &= \iint_S j_Q(r,t)\mathrm{d}S \\ &= j_Q(r,t)\iint_S \mathrm{d}S \\ &= j_Q(r,t)S \\ &= j_Q(r,t)2\pi rh\end{aligned}$$



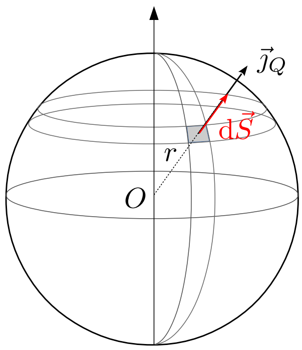
$$\boxed{\phi(r,t) = j_Q(r,t)\,2\pi rh}$$

e) Cas particulier d'un flux radial en sphérique

On considère un problème à symétrie sphérique. Dans ce cas, le vecteur densité de flux thermique est de la forme : $\vec{j}_Q = j_Q(r,t)\vec{u}_r$ en coordonnées sphériques.

On calcule le flux thermique à travers une surface S sphérique de rayon r : le vecteur densité de flux thermique est normal à cette surface et possède une norme constante sur toute cette surface.

$$\begin{aligned}\phi &= \iint_S \vec{j}_Q.\mathrm{d}\vec{S} \\ &= \iint_S j_Q(r,t)\mathrm{d}S \\ &= j_Q(r,t)\iint_S \mathrm{d}S \\ &= j_Q(r,t)S \\ &= j_Q(r,t)4\pi r^2\end{aligned}$$



$$\boxed{\phi(r,t) = j_Q(r,t)\,4\pi r^2}$$

II. Conduction thermique

II.1. Loi de Fourier

La non uniformité du champ de température entraîne un flux conductif d'énergie dirigé des hautes températures vers les basses températures, d'autant plus important que les variations spatiales de température sont élevées. Le vecteur **densité de flux conductif** vérifie la loi de Fourier :

$$\vec{j}_{cd} = -\lambda \,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T$$

avec $\lambda > 0$ la **conductivité thermique** du matériau considéré $[\lambda] =$ W.m^{-1}.K^{-1}.

λ dépend de la nature du matériau considéré et a priori de la température T. Cependant on se placera toujours dans des domaines où λ peut être assimilée à une constante.

- ▷ le signe $-$ traduit le fait que le transfert thermique s'effectue des hautes vers les basses températures. Le vecteur flux thermique est perpendiculaire aux surfaces $T = cte$ et orienté des hautes vers les basses températures.
- ▷ cette loi est en fait une approximation linéaire qui cesse d'être applicable lorsque $\|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T\|$ devient important.
- ▷ c'est une loi purement phénoménologique que l'on peut établir partir d'une modélisation de la matière à l'échelle microscopique.

À titre indicatif, voici un tableau indiquant les valeurs des conductivités thermiques de quelques matériaux :

matériau	**λ(W.m^{-1}.K^{-1})**
air	$2,6.10^{-2}$
eau	$0,61$
cuivre	$4,0.10^{2}$
acier	16
verre	$0,6$ à 2
béton	$0,92$
bois	$0,15$ à $0,45$
laine de verre	4.10^{-2}
polystyrène expansé	4.10^{-2}

Géométrie 1D axiale

Dans le cas d'une géométrie axiale, la température dépend du temps et d'une unique coordonnée cartésienne de l'espace, soit un champ de température de la forme

$$T(x,t)$$

Les surfaces isothermes (à un instant t) sont des plans $x = cte$. Le vecteur densité de flux thermique $\vec{j}_{cd}$ est perpendiculaire à ces plans donc colinéaire à $\vec{u}_x$ et dirigé des hautes vers les basses températures.

$$\vec{j}_{cd} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x,t)\vec{u}_x = j_{cd}(x,t)\vec{u}_x$$

Géométrie cylindrique

Dans le cas d'une géométrie cylindrique, la température dépend du temps et de l'unique coordonnée **cylindrique r**, soit un champ de température de la forme

$$T(r,t)$$

Les surfaces isothermes (à un instant t) sont donc des surfaces $r = cte$, donc des surfaces cylindriques d'axe Oz. Le vecteur densité de flux thermique $\vec{j}_{cd}$, perpendiculaire à ces surfaces, est donc radial et orienté des hautes vers les basses températures. On obtient, en utilisant la formule du gradient en coordonnées cylindriques :

$$\vec{j}_{cd} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(r,t)\vec{u}_r = j_{cd}(r,t)\vec{u}_r$$

Géométrie sphérique

Dans le cas d'une géométrie sphérique, la température dépend du temps et de l'unique coordonnée **sphérique** $\boldsymbol{r}$, soit un champ de température de la forme

$$T(r,t)$$

Les surfaces isothermes (à un instant t) sont donc des surfaces $r = cte$, donc des surfaces sphériques de centre O. Le vecteur densité de flux thermique $\vec{\jmath}_{cd}$, perpendiculaire à ces surfaces, est donc radial et orienté des hautes vers les basses températures. On obtient, en utilisant la formule du gradient en coordonnées sphériques :

$$\vec{\jmath}_{cd} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(r,t)\vec{u}_r = j_{cd}(r,t)\vec{u}_r$$

II.2. Équation de la diffusion thermique 1D axiale

On considère le problème à 1 dimension axiale : le champ de température est de la forme $T(x,t)$ et le vecteur densité de flux thermique :

$$\vec{\jmath}_{cd} = j_{cd}(x,t)\vec{u}_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x,t)\vec{u}_x$$

– On suppose que le transfert thermique se produit dans un milieu immobile constitué d'une phase condensée incompressible et indilatable et de caractéristiques :

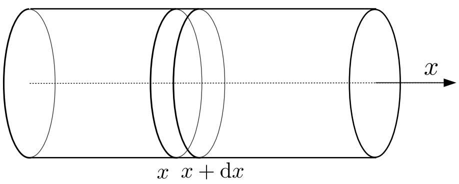
c : capacité thermique massique

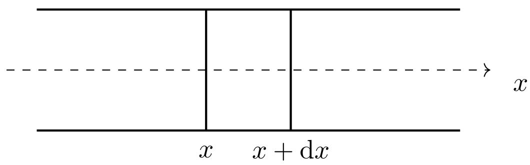
λ : conductivité thermique

μ : masse volumique

– On suppose qu'il n'y a pas de source interne d'énergie thermique (par exemple par effet Joule dans un conducteur ou dans un milieu siège de réactions nucléaires (ou chimiques) exothermiques).

On choisit comme système Σ une tranche de matériau cylindrique, de section S, d'épaisseur dx, comprise entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$, de volume $\mathrm{d}V = S\mathrm{d}x$ et de masse $\mathrm{d}m = \mu\mathrm{d}V = \mu S\mathrm{d}x$.





Le premier principe appliqué au système Σ donne :

$$\mathrm{d}U = \delta Q$$

car l'énergie cinétique macroscopique est nulle et on suppose la phase condensée idéale $\mathrm{d}V = 0$. Il n'y a donc pas de travail des forces de pressions.

Calcul de dU :

Pendant dt la température du système passe de $T(x,t)$ à $T(x,t+\mathrm{d}t)$. La variation d'énergie interne a pour expression [1]

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}m\, c\, [T(x,t+\mathrm{d}t) - T(x,t)]$$

$$\mathrm{d}U = \mu S\mathrm{d}x\, c\, \frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}t$$

Calcul de δQ :

On peut écrire $\delta Q = \delta Q_e - \delta Q_s$ avec :

- δQ_e l'énergie thermique qui est entrée par la section située à l'abscisse x pendant dt
- δQ_s l'énergie thermique qui est sortie par la section située à l'abscisse $x + \mathrm{d}x$ pendant dt

1. si le milieu est gazeux, il faut utiliser c_v la capacité thermique massique à volume constant, en supposant l'évolution du gaz isochore.

$\delta Q_e = \phi_e \mathrm{d}t = j_{cd}(x,t) S \mathrm{d}t$

$\delta Q_s = \phi_s \mathrm{d}t = j_{cd}(x+\mathrm{d}x,t) S \mathrm{d}t$

d'où

$\delta Q = S \left[j_{cd}(x,t) - j_{cd}(x+\mathrm{d}x,t) \right] S \mathrm{d}t$

$\delta Q = -S \dfrac{\partial j_{cd}}{\partial x}(x,t) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$

D'après la loi de Fourier : $j_{cd}(x,t) = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}(x,t)$, d'où :

$$\mu \cancel{S} c \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \cancel{S} \lambda \, \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \lambda \, \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t)$$

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

Équation de la diffusion thermique 1D axiale ou "équation de la chaleur" :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

▷ contrairement à l'équation d'onde, où les variables de temps t et d'espace x jouent des rôles comparables, ici on a une dérivée première par rapport à t et seconde par rapport à x : l'équation de diffusion thermique n'est pas invariante par un changement $t \to -t$:

La conduction thermique est un phénomène irréversible.

L'énergie thermique va spontanément du corps chaud vers le corps froid et non l'inverse.

II.3. Conditions aux limites

Pour résoudre l'équation de la diffusion thermique, il est nécessaire de connaître les conditions aux limites et, dans le cas où le régime n'est pas stationnaire, le profil initial de température.

En ce qui concerne les conditions aux limites spatiales, on peut considérer que :

- il y a continuité du flux thermique (cela traduit la conservation de l'énergie).
- il y a continuité de la température à l'interface entre deux milieux lorsqu'ils sont uniquement siège de diffusion thermique. Typiquement on pourra l'appliquer au niveau du contact entre deux solides. Lors d'un contact solide-fluide, si la convection intervient, on n'aura plus continuité de la température (voir dernier paragraphe).

II.4. Analyse dimensionnelle

On peut poser $D = \dfrac{\lambda}{\mu c}$ appelée **diffusivité thermique** du matériau. L'équation de la diffusion thermique devient :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Dimensionnellement : $[D] = \mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$

Soit L une dimension caractéristique du système étudié.
Soit τ le temps caractéristique de diffusion thermique.
Soit ΔT la variation caractéristique de température à l'échelle du système.

Exemple : on pose une poêle avec un manche métallique sur une plaque chauffante : L est la longueur du manche, τ le temps nécessaire pour que l'extrémité du manche soit chaude.

On peut remplacer les différents termes de l'équation de diffusion thermique par leur ordre de grandeur :

$$\frac{\Delta T}{\tau} = D\frac{\Delta T}{L^2}$$

$$\boxed{L^2 = D\tau}$$

Retenir :

Si L est une dimension caractéristique du système étudié et τ le temps caractéristique de diffusion thermique à l'échelle du système, alors on déduit de l'équation de diffusion thermique la relation :

$$L^2 = D\tau$$

avec $D = \frac{\lambda}{\mu c}$ la diffusivité thermique du matériau.

Cette relation se retrouve également rapidement à l'aide d'une analyse dimensionnelle :

$$[D] = \text{ m}^2.\text{s}^{-1}\,;\ [\tau] = \text{ s}\,;\ [D\tau] = \text{ m}^2$$

$D\tau$ est bien homogène au carré d'une longueur.

Évaluer τ pour une longueur $L = 20$ cm dans les deux cas suivants :

- le matériau est en cuivre : $\lambda = 4.10^2$ W.m^{-1}.K^{-1} ; $c = 4.10^2$ J.kg^{-1}.K^{-1} ; $\mu = 9.10^3$ kg.m^{-3}.

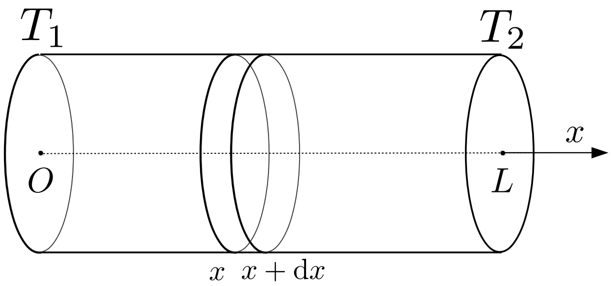
- le matériau est en acier : $\lambda = 16$ W.m^{-1}.K^{-1} ; $c = 10^3$ J.kg^{-1}.K^{-1} ; $\mu = 8.10^3$ kg.m^{-3}.

III. Régime stationnaire

III.1. Conservation du flux

On considère une situation 1D axiale.

On étudie la diffusion thermique à travers un cylindre de section S, de longueur L, porté aux températures T_1 et T_2 à ses deux extrémités situées en $x = 0$ et $x = L$. La paroi latérale est calorifugée. On se place en **régime stationnaire**.



En régime stationnaire toutes les grandeurs sont indépendantes du temps :

$$T = T(x) \text{ et } \vec{j}_{cd} = j_{cd}(x)\vec{u}_x \quad \text{avec } \vec{j}_{cd} = -\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\vec{u}_x$$

Le premier principe appliqué à une tranche d'épaisseur $\mathrm{d}x$ et de section S située entre x et $x + \mathrm{d}x$ donne, l'énergie interne étant constante :

$$\mathrm{d}U = 0$$

$$Sj_{cd}(x)\mathrm{d}t - Sj_{cd}(x + \mathrm{d}x)\mathrm{d}t = 0$$

$$Sj_{cd}(x)\mathrm{d}t = Sj_{cd}(x + \mathrm{d}x)\mathrm{d}t$$

$$\phi_e\mathrm{d}t = \phi_s\mathrm{d}t$$

$\Rightarrow$ le flux thermique se conserve $\phi_e = \phi_s = \phi$.

> En régime stationnaire et en l'absence de source, **le flux thermique se conserve**.

Calcul de $T(x)$ à partir de la conservation du flux.

$$Sj_{cd} = \phi$$

$$j_{cd} = \frac{\phi}{S}$$

$$-\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \frac{\phi}{S}$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\frac{\phi}{\lambda S}$$

On intègre

$$T(x) = -\frac{\phi}{\lambda S}x + A$$

Les deux constantes A et ϕ se déduisent des conditions aux limites : $\begin{cases} \text{en } x = 0 & T(0) = T_1 \\ \text{en } x = L & T(L) = T_2 \end{cases}$

$T(0) = T_1 = A$

$T(L) = -\dfrac{\phi}{\lambda S}L + T_1 = T_2$

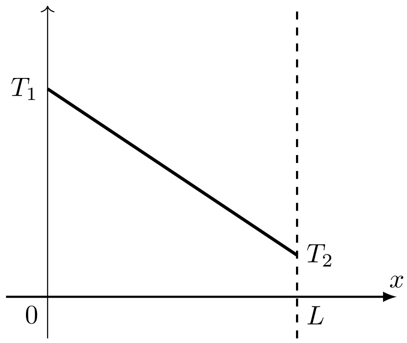
d'où $\quad T_1 - T_2 = \dfrac{\phi}{\lambda S} L$

On obtient l'expression du flux : $\boxed{\phi = (T_1 - T_2)\dfrac{\lambda S}{L}}$

puis celle de $T(x)$:

$$\boxed{T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x}$$

La température est une fonction affine de x.



Calcul de $T(x)$ par résolution directe de l'équation de la chaleur.

En régime stationnaire $T = T(x)$. L'équation de diffusion thermique se réduit alors à

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

En intégrant deux fois :

$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = A$

$T(x) = Ax + B$

avec A et B deux constantes à déterminer à l'aide des conditions aux limites.

$T(0) = B = T_1$

$T(L) = T_2 = AL + T_1 = T_2$ d'où $A = \dfrac{T_2 - T_1}{L}$.

On retrouve bien la même expression de $T(x)$:

$$\boxed{T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x}$$

On peut calculer la densité de flux conductif

$$j_{cd} = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{L} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L}$$

et retrouver l'expression du flux thermique :

$$\phi = j_{cd} S = \frac{\lambda S}{L}(T_1 - T_2)$$

Si $T_1 > T_2$ alors $\phi > 0$. On vérifie que le transfert thermique s'effectue bien des hautes vers les basses températures.

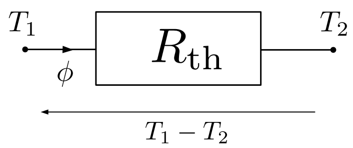
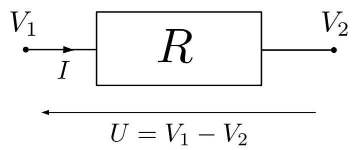
Le flux thermique est d'autant plus élevé (à $T_1 - T_2$, S et L données) que la conductivité thermique λ est élevée.

III.2. Analogie électrique : résistance thermique

On a établi, dans le paragraphe précédent, l'expression du flux thermique ϕ à travers une section S quelconque d'un conducteur cylindrique, de longueur L, de conductivité thermique λ soumis à une différence de température $(T_1 - T_2)$:

$$\phi = j_{cd} S = \frac{\lambda S}{L}(T_1 - T_2)$$

Le flux thermique est proportionnel à la différence de température imposée $(T_1 - T_2)$.

Conduction thermique	Conduction électrique
	
$T_1 - T_2 = R_{\text{th}}\phi$	$U = V_1 - V_2 = RI$

Par analogie avec l'électricité (attention à l'orientation), on peut définir la **résistance thermique** par la relation :

$$R_{\text{th}} = \frac{T_1 - T_2}{\phi}$$

Unités : $[R_{\text{th}}] =$ K.W^{-1}.

Un cylindre de longueur L, de section S, parcouru par un flux thermique axial a pour résistance :

$$R_{\text{th}} = \frac{L}{\lambda S}$$

On peut définir de même la **conductance thermique** par la relation

$$G_{\text{th}} = \frac{1}{R_{\text{th}}} = \frac{\phi}{T_1 - T_2}$$

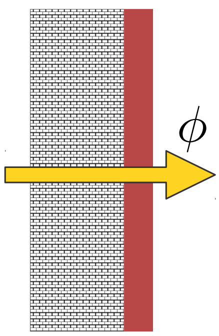
Un cylindre de longueur L, de section S, parcouru par un flux thermique axial a pour conductance :

$$G_{\text{th}} = \frac{\lambda S}{L}$$

Unités : $[G_{\text{th}}] =$ W.K^{-1}.

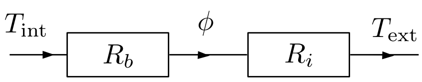
Exemples

• Résistance thermique d'un mur en béton recouvert d'un matériau isolant : le béton et l'isolant sont traversés par le même flux thermique → leurs résistances thermiques sont en série.



R_{b} résistance thermique du béton

R_{i} résistance thermique de l'isolant



$$R_{\text{tot}} = R_{\text{b}} + R_{\text{i}}$$

• Résistance thermique d'un mur muni de deux ouvertures : une porte et une fenêtre.

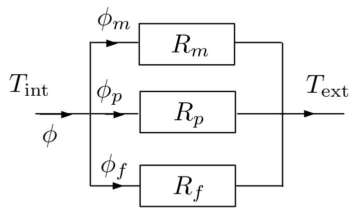
R_m résistance thermique du mur

R_p résistance thermique de la porte

R_f résistance thermique de la fenêtre

Le mur, la fenêtre et la porte sont soumis à la même différence de température → leurs résistances thermiques sont en parallèle.

$$\frac{1}{R_\mathrm{tot}} = \frac{1}{R_\mathrm{m}} + \frac{1}{R_\mathrm{p}} + \frac{1}{R_\mathrm{f}}$$



Dans ce cas, on a plutôt intérêt à raisonner avec la conductance équivalente qui se calcule directement :

$$G_\mathrm{tot} = G_\mathrm{m} + G_\mathrm{p} + G_\mathrm{f}$$

Notion de pont thermique :

Si la fenêtre est mal isolée on peut avoir $R_\mathrm{f} \ll R_\mathrm{m}$ et $R_\mathrm{f} \ll R_\mathrm{p}$. D'où $R_\mathrm{tot} \simeq R_\mathrm{f}$.

$$\phi_\mathrm{tot} = \phi_\mathrm{p} + \phi_\mathrm{m} + \phi_\mathrm{f} = \frac{T_\mathrm{int} - T_\mathrm{ext}}{R_\mathrm{m}} + \frac{T_\mathrm{int} - T_\mathrm{ext}}{R_\mathrm{p}} + \frac{T_\mathrm{int} - T_\mathrm{ext}}{R_\mathrm{f}} \simeq \frac{T_\mathrm{int} - T_\mathrm{ext}}{R_\mathrm{f}} \simeq \phi_\mathrm{f}$$

l'essentiel du flux thermique part par la fenêtre

III.3. Approximation des régimes quasistationnaires (ARQS)

On a montré qu'en régime stationnaire, le champ de température dans un cylindre de section S soumis à une différence de température $T_1 - T_2$ était de la forme

$$T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x$$

Supposons qu'à $t = 0$ on abaisse la température en $x = 0$ de T_1 à T_1' en une durée Δt. Si on attend suffisamment longtemps le profil de température va tendre vers le nouveau profil stationnaire

$$T(x) = T_1' + \frac{T_2 - T_1'}{L} x$$

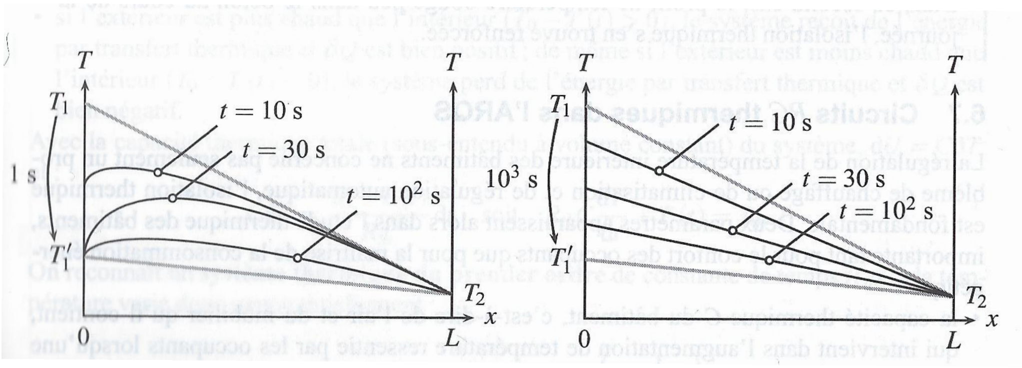
On a représenté sur la figure ci-dessous l'évolution du profil de température dans deux cas :

- à gauche le passage de T_1 à T_1' se fait "rapidement"
- à droite le passage de T_1 à T_1' se fait "lentement"

On a introduit au IV.4. un temps caractéristique τ de réponse du système à partir de l'équation de diffusion thermique

$$\tau = \frac{L^2}{D}$$

- Si $\Delta t \ll \tau$ le profil de température n'a pas le temps de s'adapter et on n'observe plus une fonction affine.
- Si $\Delta t \gg \tau$ le profil de température a le temps de s'adapter et on observe une fonction affine dont la pente varie progressivement lorsque la température en $x = 0$ diminue. On peut donc dans ce cas utiliser les résultats du régime stationnaire et utiliser la résistance thermique pour calculer le flux thermique



L'ARQS thermique est vérifiée, pour un système de dimension caractéristique L et de diffusivité thermique D, lorsque le temps caractéristique d'évolution $\tau = L^2/D$ de la température, lié à la diffusion thermique, est très inférieur au temps caractéristique Δt de variation de la température imposée aux limites du systèmes.

$$\tau \ll \Delta t$$

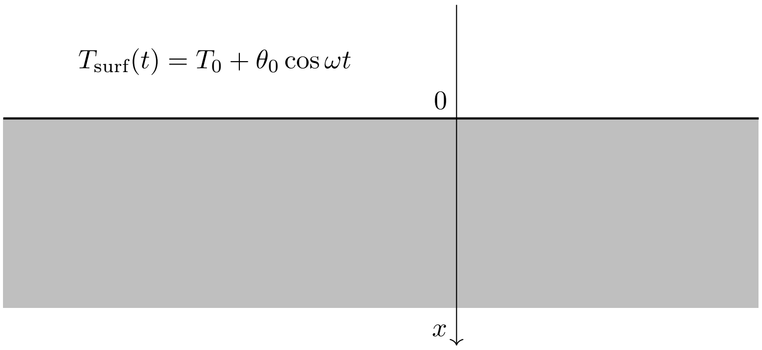
$$\frac{L^2}{D} \ll \Delta t$$

IV. Cas non stationnaire : "ondes thermiques"

On remarque que les caves suffisamment enterrées voient peu varier leur température au cours de l'année. On modélise les variations de température en surface par une fonction de la forme :

$$T_{\text{surf}}(t) = T_0 + \theta_0 \cos \omega t$$

- T_0 : température moyenne
- $\omega = \frac{2\pi}{T}$ traduit des variations de température (annuelle $T = 1$ an , diurne $T = 1$ jour).
- θ_0 amplitude de l'écart par rapport à la valeur moyenne.



On se place à 1 D : $T = T(x,t)$. On résout l'équation de diffusion thermique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{avec } D = \frac{\lambda}{\mu c}$$

avec pour condition aux limites en surface :

$$\forall t \quad T(0,t) = T_{\text{surf}}(t) = T_0 + \theta_0 \cos \omega t$$

On admet qu'il s'instaure un régime sinusoïdal permanent. On cherche donc des solutions de la forme :

$$T(x,t) = T_0 + \theta(x)\cos(\omega t + \varphi(x))$$

On passe en notation complexe :

$$\underline{T}(x,t) = T_0 + \underline{\theta}(x)e^{i\omega t} \ \text{ avec } \ \underline{\theta}(x) = \theta(x)e^{i\varphi(x)}$$

On reporte dans l'équation de diffusion thermique

$i\omega\underline{\theta}(x) = D\underline{\theta}''(x)$

$\underline{\theta}''(x) - i\dfrac{\omega}{D}\underline{\theta}(x) = 0$

On obtient une équation différentielle d'ordre 2, linéaire homogène à coefficients constants. On pose l'équation caractéristique :

$r^2 - i\dfrac{\omega}{D} = 0$

$r^2 = i\dfrac{\omega}{D}$

qui admet les deux racines : $r_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{\omega}{D}}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{\omega}{2D}}(1+i)$. Ainsi :

$$\underline{\theta}(x) = Ae^{\sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1+i)x} + Be^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1+i)x} \qquad \text{avec } (A,B) \in \mathbb{C}^2$$

Si $A \neq 0$ quand $x \to +\infty$, $T \to\to +\infty$ ce qui est physiquement impossible. On en déduit $A = 0$.

$$\underline{\theta}(x) = Be^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1+i)x}$$

On pose $\delta = \sqrt{\dfrac{2D}{\omega}}$ (homogène à une longueur)

$$\underline{\theta}(x) = Be^{-(1+i)\frac{x}{\delta}}$$

Conditions aux limites en $x = 0$:

$\forall t \quad \underline{T}(0,t) = T_0 + \theta_0\, e^{i\omega t} = T_0 + \underline{\theta}(0)\, e^{i\omega t} = T_0 + Be^{i\omega t}$ d'où $B = \theta_0$.

On en déduit

$T(x,t) = T_0 + \mathrm{Re}\left(\underline{\theta}(x)e^{i\omega t}\right) = T_0 + \mathrm{Re}\left(\theta_0\, e^{-(1+i)\frac{x}{\delta}+i\omega t}\right) = T_0 + \theta_0\, e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$

$$\boxed{T(x,t) = T_0 + \theta_0\, e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)}$$

On voit qu'au delà de quelques δ les variations de température ne sont plus transmises et $\delta \nearrow$ quand $\omega \searrow$.
Les diagrammes ci-dessous représentent les variations temporelles de $T - T_0$ en fonction de la profondeur pour un forçage annuel (figure 1) ou journalier (figure 2). On a pris pour la diffusivité thermique du sol : $D = 6,0.10^{-7}$ m^2.s^{-1} .

Figure 1

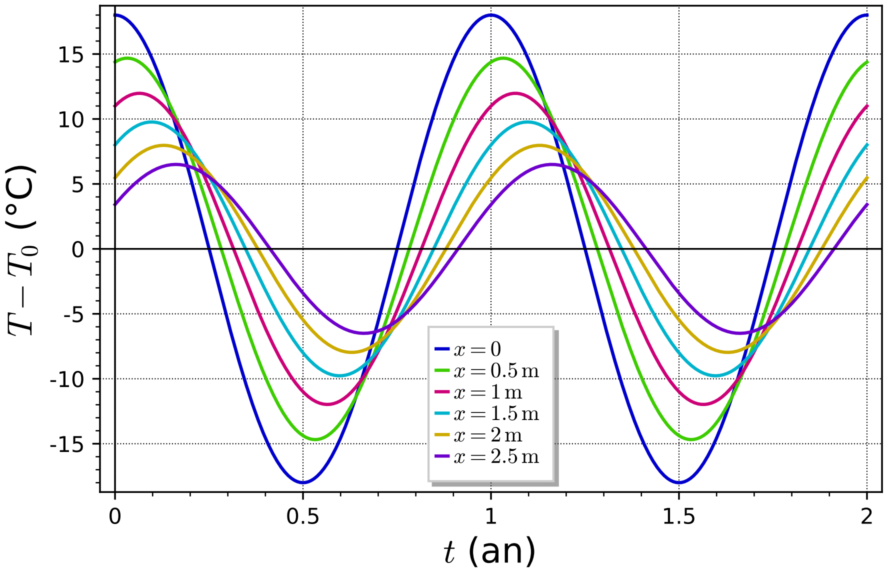
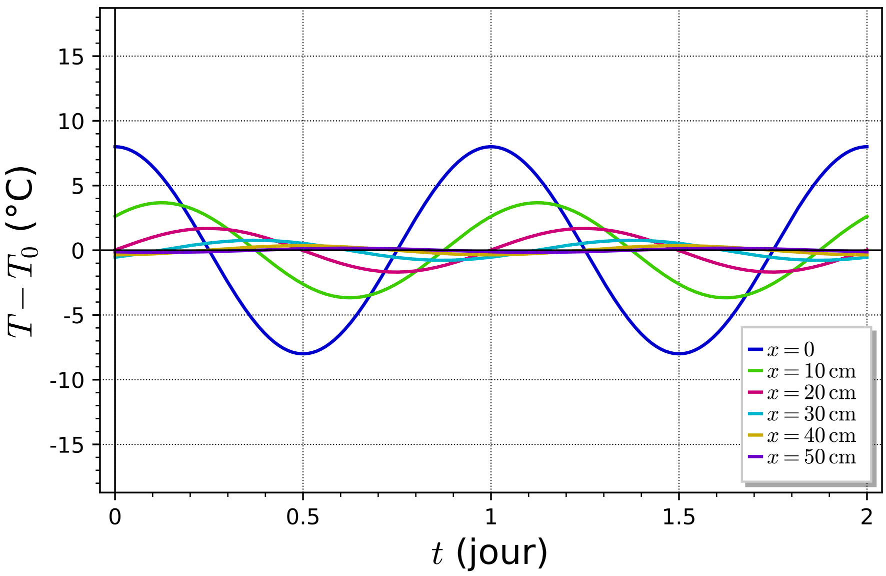


Figure 2



Variations journalières

$\omega = \dfrac{2\pi}{24 \times 3600} = 7,3.10^{-5}$ rad.s^{-1}

$\delta = \sqrt{\dfrac{2D}{\omega}} = 13$ cm

Supposons que la température varie de 0°C à 16°C. À partir de quelle profondeur l'amplitude des variations de température autour de la valeur moyenne ne dépasse-t-elle pas 1°C ?

$0 \leqslant T \leqslant\ 16°\text{C} \ \Rightarrow\ T_0 = 8°\text{C}$ et $\theta_0 = 8°\text{C}$

On cherche x tel que $\theta_0\, e^{-\frac{x}{\delta}} = 1°\text{C}$.

$e^{-\frac{x}{\delta}} = \frac{1}{8}$

$x = \delta \ln 8 = 27$ cm

Variations annuelles

$\omega = \dfrac{2\pi}{365,25 \times 24 \times 3600} = 2,0.10^{-7}$ rad.s^{-1}

$\delta = \sqrt{\dfrac{2D}{\omega}} = 2,45$ m

Supposons que la température varie de −10°C à 26°C. À partir de quelle profondeur l'amplitude des variations de température autour de la valeur moyenne ne dépasse-t-elle pas 1°C ?

$-10 \leqslant T \leqslant\ 26°\text{C} \ \Rightarrow\ T_0 = 8°\text{C}$ et $\theta_0 = 18°\text{C}$

On cherche x tel que $\theta_0 e^{-\frac{x}{\delta}} = 1°\text{C}$.

$e^{-\frac{x}{\delta}} = \frac{1}{18}$

$x = \delta \ln 18 = 7,1$ m

Le facteur $\theta_0 \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$ peut être interprété comme une onde se propageant dans le sens des x croissants à la vitesse c telle que

$\theta_0 \cos\omega\left(t - \frac{x}{\delta\omega}\right) = \theta_0 \cos\left(\omega(t - \frac{x}{c})\right)$
avec $c = \delta\omega$

cette onde étant progressivement atténuée d'un facteur $e^{-\frac{x}{\delta}}$.

Pour les variations diurnes $c = 9,4.10^{-6}$ m.s^{-1} = 81 cm/jour

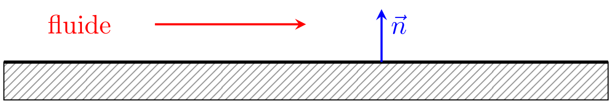
Pour les variations annuelles $c = 4,9.10^{-7}$ m.s^{-1} = 4,2 cm/jour.

L'"onde thermique" liée aux variations annuelles est beaucoup plus lente et s'atténue moins rapidement que celle liée aux variations diurnes.

V. Transferts conducto-convectif

V.1. Transfert conducto-convectif à la paroi : loi de Newton

Ce type de transfert se produit à l'interface solide-fluide. Le transfert thermique s'effectue par conduction thermique à l'intérieur du solide. Le fluide peut éventuellement être mis en mouvement pour permettre une évacuation plus efficace de la chaleur (convection forcée).



Soit T_{paroi} la température de surface de la paroi solide.

Soit T_0 la température du fluide extérieur

On remarque qu'ici, il n'y a pas continuité de la température en surface. Cette continuité se réalise en fait dans la fine couche limite formée par l'écoulement du fluide sur la paroi. La température T_0 est prise en dehors de cette couche limite.

Soit $\vec{n}$ un vecteur unitaire normal à la paroi orienté du solide vers le fluide.
Le vecteur flux **conducto-convectif** vérifie la **loi de Newton** :

$$\vec{j}_{cc} = h(T_{\text{paroi}} - T_0)\,\vec{n}$$

h est une constante qui dépend des propriétés thermo-physiques du fluide et de la nature de l'écoulement.

$$[h] = \text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$$

Pour $T_{\text{paroi}} > T_0$, $\vec{j}_{cc}$ est orienté dans le même sens que $\vec{n}$: le flux thermique sortant du solide est positif et il permet d'évacuer de la chaleur du solide vers le fluide.

Type de transfert	Fluide	$h(\text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1})$
Convection naturelle	gaz	5 - 30
	eau	100 - 1000
Convection forcée	gaz	10 - 300
	eau	300 - 12000
	huile	50 - 1700
	métal liquide	6000 - 110000

Condition aux limites : la conservation de l'énergie entraîne la continuité du flux thermique en surface.
Ainsi, si on note λ la conductivité thermique du matériau, on aura en surface :

$$j_{cd}\,\mathrm{d}S = j_{cc}\,\mathrm{d}S$$

$$j_{cd} = j_{cc}$$

On pourra écrire, en régime stationnaire 1D axial, en prenant $\vec{n} = \vec{u}_x$

$$-\lambda\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_{\text{paroi}}} = h(T_{\text{paroi}} - T_0)$$

V.2. Résistance thermique conducto-convective

Le flux thermique sortant à travers une surface S de paroi vaut :

$$\Phi = h(T_{\text{paroi}} - T_0)S = \frac{(T_{\text{paroi}} - T_0)}{R_{cc}}$$

On peut alors définir une résistance thermique **conducto-convective** :

$$R_{cc} = \frac{T_{\text{paroi}} - T_0}{\phi} = \frac{1}{Sh}$$

Transfert d'énergie par conduction thermique	
Densité de flux thermique	Définir et algébriser la puissance thermique échangée à travers une surface.
Loi de Fourier	Relier la non-uniformité de la température à l'existence d'un flux thermique et interpréter son sens. Citer des ordres de grandeur de conductivité thermique pour des matériaux dans le domaine de l'habitat.
Analogie électrique dans le cas du régime stationnaire	Définir la résistance thermique. Exploiter l'analogie électrique lors d'un bilan thermique.
Loi de Newton	Exploiter la loi de Newton fournie pour prendre en compte les échanges conducto-convectifs en régime stationnaire.
Équation de la chaleur sans terme source dans le cas d'une conduction thermique unidirectionnelle.	Établir l'équation de la diffusion thermique dans le cas unidimensionnel. Interpréter qualitativement l'irréversibilité du phénomène. Relier le temps et la longueur caractéristiques d'un phénomène de diffusion thermique au coefficient de diffusion thermique par une analyse dimensionnelle
Ondes thermiques	Établir une distance ou un temps caractéristique d'atténuation en utilisant le modèle de l'onde plane en géométrie unidimensionnelle.