

M6 - Oscillations forcées

Lorsqu'on laisse osciller une masse à l'extrémité d'un ressort les oscillations s'amortissent plus ou moins rapidement suivant l'importance des frottements.

Pour maintenir les oscillations d'un système il faut fournir de l'énergie à ce système, afin de compenser les pertes énergétiques dues aux frottements.

Nous envisagerons dans ce chapitre d'exciter un système mécanique de manière sinusoïdale.

Après un régime transitoire, le système va vibrer sinusoïdalement à la même fréquence que la fréquence excitatrice. Cependant, le système masse-ressort que l'on considère présente une fréquence propre (fréquence à laquelle s'effectuent les oscillations en l'absence de frottements). Dans certaines conditions, si on excite le système à une fréquence proche de sa fréquence propre, la réponse va être très importante : c'est le phénomène de résonance.

I. Quelques observations : phénomène de résonance

- Résonance d'un pont
- Rupture d'un verre
<https://www.youtube.com/watch?v=47cPhhywv0o>
- système masse-ressort :
https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/ressort_rsf.php

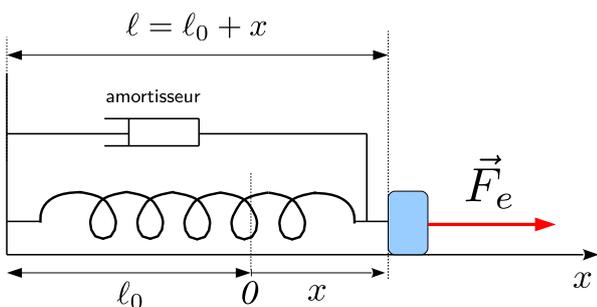
Dans tous les cas : pour une force excitatrice périodique la réponse peut devenir importante pour certaines fréquences.

II. Régime sinusoïdal permanent

II.1. Mise en équation

a) Exemple 1

On exerce sur la masse m une force excitatrice \vec{F}_e sinusoïdale. On suppose le contact masse-support sans frottement. L'amortisseur provoque une force $\vec{F} = -h\vec{v}$. On exerce sur la masse m une force excitatrice $\vec{F}_e = F_0 \cos \omega t \vec{u}_x$.



Système : masse m

Référentiel : terrestre supposé galiléen

Bilan des forces :

- poids $m\vec{g} \perp \vec{u}_x$
- réaction normale \vec{R} du support $\perp \vec{u}_x$
- tension du ressort :
 $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x = -k(\ell_0 + x - \ell_0)\vec{u}_x = -kx\vec{u}_x$.
- force d'amortissement $\vec{F} = -h\vec{v} = -h\dot{x}\vec{u}_x$
- force excitatrice $\vec{F}_e = F_0 \cos \omega t \vec{u}_x$

Le principe fondamental de la dynamique projeté sur \vec{u}_x donne

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} + F_0 \cos \omega t$$

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

$$\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

On peut poser $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ et $\frac{h}{m} = \frac{\omega_0}{Q}$, soit $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{m\omega_0}{h} = \frac{\sqrt{km}}{h}$.

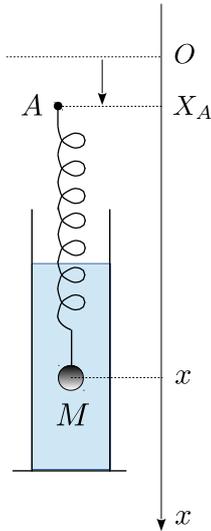
$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

b) Exemple 2

On peut également faire osciller sinusoidalement l'extrémité d'un ressort.

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/ressort_rsf.php

L'extrémité supérieure du ressort est animée d'un mouvement sinusoidal du type $X_A(t) = X_{A_m} \cos \omega t$



Système : masse m

Référentiel : terrestre supposé galiléen

Bilan des forces :

- poids $m\vec{g}$ avec $\vec{g} = g\vec{u}_x$
- poussée d'Archimède $\vec{\pi}_a = -m^*\vec{g}$ avec m^* la masse de liquide déplacée par la sphère.

- tension du ressort :

$$\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x = -k(x - X_A - \ell_0)\vec{u}_x$$

- force d'amortissement $\vec{F}_a = -h\vec{v} = -h\dot{x}\vec{u}_x$

PFD : $m\vec{a} = m\ddot{x}\vec{u}_x = \vec{T} + (m - m^*)\vec{g} + \vec{F}_a$

Le principe fondamental de la dynamique projeté sur \vec{u}_x donne

$$m\ddot{x} = -k(x - X_A - \ell_0) + (m - m^*)g - h\dot{x} \tag{E}$$

À l'équilibre, en l'absence d'excitation ($X_A = 0$), $x = x_e$ tel que

$$0 = -k(x_e - \ell_0) + (m - m^*)g \tag{CE}$$

On note $X = x - x_e$ l'écart à la position d'équilibre. On a donc, en faisant la différence des deux équations (E)-(CE) :

$$m\ddot{x} = -k(\underbrace{x - x_e - X_A}_{=X}) - h\dot{x}$$

Or $\dot{X} = \dot{x}$ et $\ddot{X} = \ddot{x}$. D'où

$$m\ddot{X} = -k(X - X_A) - h\dot{X}$$

$$m\ddot{X} + h\dot{X} + kX = kX_A$$

$$\ddot{X} + \frac{h}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = \frac{k}{m}X_A(t)$$

On pose $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ et $\frac{h}{m} = \frac{\omega_0}{Q}$, soit $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{m\omega_0}{h} = \frac{\sqrt{km}}{h}$.

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 X_{A_m} \cos \omega t$$

II.2. Régime transitoire - régime permanent

Formellement on doit résoudre une équation différentielle du type :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = E_m \cos \omega t$$

avec $e(t) = E_m \cos \omega t$ le terme exciteur (dans le premier cas $E_m = \frac{F_0}{m}$ dans le second $E_m = \omega_0^2 X_{A_m}$).

La solution de l'équation est la superposition :

- ▷ de la solution $X_h(t)$ de l'équation linéaire homogène associée

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

$X_h(t)$ correspond à un des trois régimes d'oscillations libres rencontrés en M4 (pseudo-périodique, critique, apériodique). Cette solution tend vers 0 au bout d'un certains temps.

- ▷ d'une solution particulière de l'équation avec second membre. L'équation différentielle étant **linéaire**, la solution particulière associée à un signal sinusoïdal de pulsation ω est un signal sinusoïdal de **même pulsation**.

$$X_p(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Ainsi :

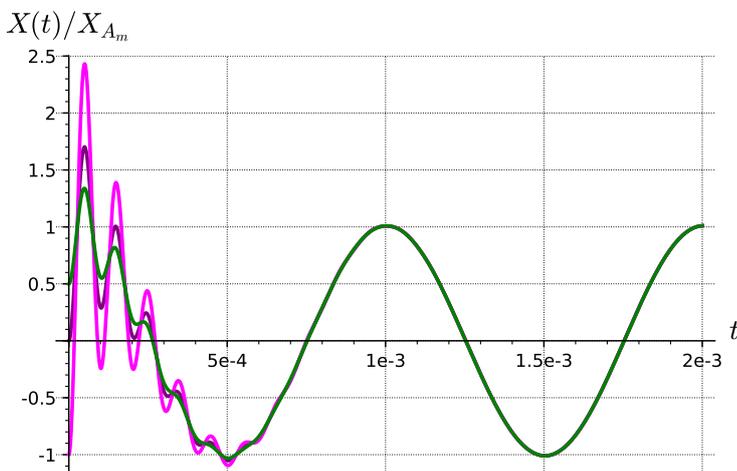
$$X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) + \begin{cases} e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) & \text{si } \Delta < 0 \quad \text{régime pseudo-périodique} \\ e^{-\omega_0 t} (At + B) & \text{si } \Delta = 0 \quad \text{régime critique} \\ Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \text{ avec } r_1 < 0 \text{ et } r_2 < 0 & \text{si } \Delta > 0 \quad \text{régime apériodique} \end{cases}$$

Les constantes A et B dépendent des conditions initiales en position et en vitesse : $X(0)$ et $\dot{X}(0)$.

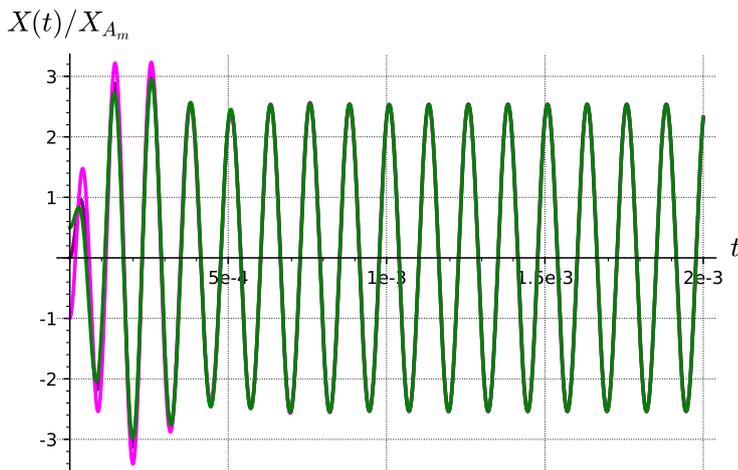
Tant que les deux solutions coexistent, on est dans le **régime transitoire**.

Lorsque la solution de l'équation homogène s'est éteinte, on a atteint le régime permanent. L'excitation étant sinusoïdale, on le nomme **régime sinusoïdal permanent (RSP)**. On dit aussi régime sinusoïdal forcé ou régime sinusoïdal établi. La solution du RSP est indépendante des conditions initiales qui n'influent que sur le régime transitoire (elles déterminent les valeurs des constantes A et B).

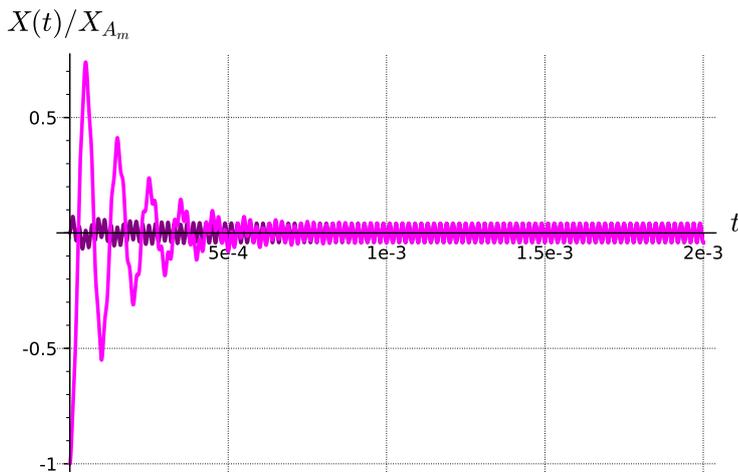
On suppose qu'on applique le signal $X_A(t) = X_{A_m} \cos \omega t$ depuis l'instant initial $t = 0$. On a tracé (à l'aide du logiciel SageMath) la réponse $X(t)/X_{A_m}$ pour différentes valeurs de la pulsation ω et différentes conditions initiales. On s'est placé dans le cas où $Q = 5$ (régime transitoire pseudo-périodique) et $\omega_0 = 2\pi \cdot 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$



$$\omega = \omega_0/10$$



$$\omega = 0,8\omega_0$$



$$\omega = 10\omega_0$$

Commenter les courbes obtenues.

- On observe sur toutes les courbes un régime transitoire pseudo-périodique de même durée (environ $5 \cdot 10^{-4}$ s).

Vérification :

On peut poser $e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} = e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{10}{2\pi \cdot 10^4} = \frac{10^{-3}}{2\pi}$ s.

Au bout de 3τ l'amplitude du signal est inférieure à 5% de l'amplitude initiale.

$$3\tau = 3 \cdot \frac{10^{-3}}{2\pi} \text{ s} \simeq 3 \cdot \frac{10^{-3}}{2 \times 3} \text{ s} \simeq \frac{10^{-3}}{2} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

Ce qui est en accord avec ce qu'on observe.

- Lorsque le régime sinusoïdal permanent est atteint toutes les courbes se confondent, quelles que soient les condition initiales.
- On constate que, le régime sinusoïdal permanent atteint, le rapport X_m/X_{A_m} entre l'amplitude X_m des oscillations sur l'amplitude X_{A_m} de l'excitation dépend de la fréquence :
 - Il vaut 1 pour $\omega = \omega_0/10$: à basse fréquence l'amplitude des oscillations suit exactement l'amplitude de l'excitation.
 - Il est supérieur à 1 (ici environ 2,5) pour une pulsation proche de ω_0 : l'amplitude des oscillations est plus importante que l'amplitude de l'excitation.
 - À haute fréquence, l'amplitude des oscillations est beaucoup plus faible que l'amplitude excitatrice

L'amplitude des oscillations observées en régime sinusoïdal permanent dépend de la fréquence du signal exciteur.

Il en est de même pour la phase φ .

III. Calcul de la solution du régime sinusoïdal permanent

On souhaite déterminer l'amplitude et la phase des oscillations observées. Pour cela, il nous faut calculer la solution $X_m \cos(\omega t + \varphi)$ du régime sinusoïdal permanent. La notation complexe va alors s'avérer très utile.

En physique, pour éviter la confusion avec la notation de l'intensité i d'un courant, il est fréquent de noter $j^2 = -1$ à la place de $i^2 = -1$.

III.1. Notation complexe

Excitation (entrée)	→	Réponse (sortie)
$E_m \cos \omega t$	\rightarrow	$X_m \cos(\omega t + \varphi)$
$E_m \sin \omega t$	\rightarrow	$X_m \sin(\omega t + \varphi)$
$E_m(\cos \omega t + j \sin \omega t)$	\rightarrow	$X_m(\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi))$
$E_m e^{j\omega t}$	\rightarrow	$X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$

À toute grandeur sinusoïdale $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ on peut associer la grandeur complexe

$$\underline{X} = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{X}_m e^{j\omega t}$$

avec $\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi}$ l'**amplitude complexe** du signal.

$$X(t) = \text{Re}(\underline{X})$$

Remarque :

– De même, on associe au signal $Y(t) = Y_m \sin(\omega t + \varphi)$ la valeur complexe $\underline{Y} = Y_m e^{j(\omega t + \varphi)}$ avec $Y(t) = \text{Im}(\underline{Y}(t))$.

- dérivation : $\frac{d\underline{X}}{dt} = X_m j\omega e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega \underline{X}$. Dériver revient à multiplier par $j\omega$.

$$\frac{d\underline{X}}{dt} = j\omega \underline{X}$$

- intégration : $\int \underline{X} dt = \frac{\underline{X}}{j\omega}$. Intégrer revient à diviser par $j\omega$.

$$\int \underline{X} dt = \frac{\underline{X}}{j\omega}$$

III.2. Étude de la réponse en élongation $X(t)$

a) Calcul de l'amplitude complexe \underline{X}_m

On cherche la solution en régime sinusoïdal permanent de l'équation :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 X_{A_m} \cos \omega t$$

Elle est de la forme $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$. On passe en notation complexe :

- à $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ on associe $\underline{X} = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{X}_m e^{j\omega t}$
- à $X_{A_m} \cos \omega t$ on associe $X_{A_m} e^{j\omega t}$

$$\underline{\ddot{X}} + \frac{\omega_0}{Q} \underline{\dot{X}} + \omega_0^2 \underline{X} = \omega_0^2 X_{A_m} e^{j\omega t}$$

$$(j\omega)^2 \underline{X} + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{X} + \omega_0^2 \underline{X} = \omega_0^2 X_{A_m} e^{j\omega t}$$

$$\underline{X} \left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega + \omega_0^2 \right) = \omega_0^2 X_{A_m} e^{j\omega t}$$

$$\underline{X}_m e^{j\omega t} \left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega + \omega_0^2 \right) = \omega_0^2 X_{A_m} e^{j\omega t}$$

$$\underline{X}_m(\omega) = X_m e^{j\varphi} = \frac{\omega_0^2 X_{A_m}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j \frac{\omega_0}{Q} \omega}$$

Valeurs asymptotiques :

- $\omega \ll \omega_0 \quad (\omega \rightarrow 0)$

$$\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi} \simeq X_{A_m}$$

d'où $X_m = X_{A_m}$ et $\varphi = 0$

La masse m oscille avec la même amplitude et la même phase que A .

- $\omega \gg \omega_0 \quad (\omega \rightarrow \infty)$

$$\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi} \simeq -\frac{\omega_0^2}{\omega^2} X_{A_m}$$

d'où $X_m = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} X_{A_m} \rightarrow 0$ pour $\omega \rightarrow \infty$.

et $\varphi = \pi$

Les oscillations du point M sont de faible amplitude et en opposition de phase par rapport à celles de A .

Cas particulier : $\omega = \omega_0$

- $\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi} = Q \frac{X_{A_m}}{j}$

d'où $X_m = Q X_{A_m}$

Pour $Q > 1$ on constate que l'amplitude des oscillations du point M est plus élevée que celle du point A .

et $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

Le point M oscille en quadrature de phase retard par rapport à A .

b) Réponse en amplitude

On modifie l'expression de \underline{X}_m de manière à faire apparaître une longueur au numérateur et donc un nombre sans dimension au dénominateur. Pour cela on divise numérateur et dénominateur par ω_0^2 .

$$\underline{X}_m(\omega) = \frac{X_{A_m}}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}) + j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}$$

Pour alléger les calculs on pose $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ (u est donc sans dimension)

$$\underline{X}_m(u) = X_m e^{j\varphi} = \frac{X_{A_m}}{(1 - u^2) + \frac{j}{Q} u}$$

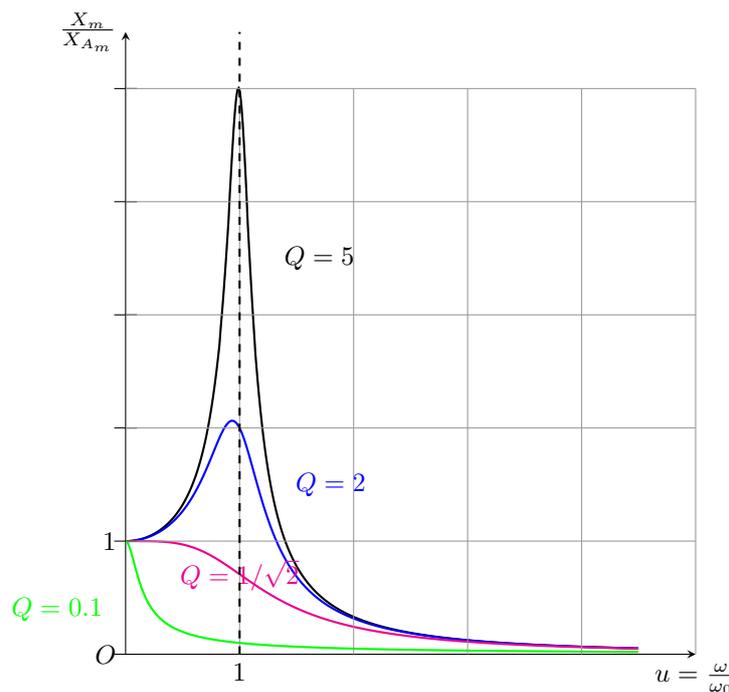
On égale les modules :

$$X_m(u) = |\underline{X}_m(u)| = \frac{X_{A_m}}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}$$

On vérifie que

- pour $\omega \ll \omega_0$ ($u \ll 1$) : $X_m \simeq X_{A_m}$.
- pour $\omega \gg \omega_0$ ($u \gg 1$) : $X_m \simeq X_{A_m}/u^2 \rightarrow 0$.
- pour $\omega = \omega_0$ ($u = 1$) : $X_m = Q X_{A_m}$

On a tracé ci-dessous la courbe donnant $\frac{X_m}{X_{A_m}}$ en fonction de $u = \frac{\omega}{\omega_0}$:



On vérifie graphiquement les valeurs asymptotiques en 0 et à l'infini.

On vérifie que pour $u = 1$ ($\omega = \omega_0$) $\frac{X_m}{X_{A_m}} = Q$.

On constate que, pour des valeurs suffisamment élevées du facteur de qualité, la courbe admet un maximum pour une valeur de $u \leq 1$ d'autant plus proche de 1 que le facteur de qualité augmente. On dit qu'il y a **résonance**. Plus le facteur de qualité est élevé, plus l'amplitude à la résonance est importante.

• Condition d'existence d'une résonance

Il y a **résonance** s'il existe une valeur de ω (donc de u) non nulle telle que X_m admette un maximum.

Le numérateur étant constant, X_m admet un maximum si le dénominateur admet un minimum. La fonction racine carré étant une fonction croissante, X_m admet finalement un maximum si la fonction

$$f(u) = (1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2} \quad \text{admet un minimum.}$$

On cherche donc la valeur de u non nulle telle que $f'(u) = 0$.

$$f'(u) = 2(1 - u^2)(-2u) + \frac{2u}{Q^2} = 2u \left(2(u^2 - 1) + \frac{1}{Q^2} \right) = 0$$

$$2(u^2 - 1) = -\frac{1}{Q^2}$$

$$u^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

Si $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$, soit $1 > \frac{1}{2Q^2}$, $Q^2 > \frac{1}{2}$, $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors il existe une résonance pour

$$u = u_r = \frac{\omega_r}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

On en déduit la pulsation de résonance ω_r :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

La pulsation de résonance ω_r est inférieure à ω_0 mais est d'autant plus proche de ω_0 que le facteur de qualité est élevé. Pour $Q \geq 5$, $\omega_r \simeq \omega_0$ et $\frac{X_m}{X_{A_m}} \simeq Q$, $X_m = QX_{A_m}$.

Ainsi, pour un facteur de qualité $Q = 10$ ($\omega_r \simeq \omega_0$) l'amplitude des oscillations de M sera 10 fois plus élevée à la résonance que celle de A .

On comprend pourquoi il faut éviter d'exciter un système à une fréquence proche de sa fréquence propre.

Pour éviter la résonance il faut que $Q < 1/\sqrt{2}$.

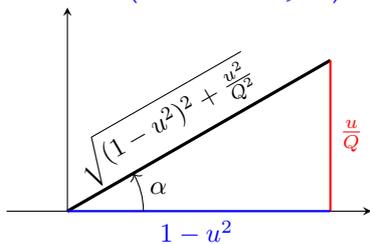
c) Réponse en phase

$$\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi} = \frac{X_{Am}}{(1-u^2) + \frac{j}{Q}u}$$

On égale les arguments :

$$\varphi = \underbrace{\arg(X_{Am})}_{=0} - \arg\left((1-u^2) + \frac{j}{Q}u\right) = -\arg\left((1-u^2) + \frac{j}{Q}u\right) = -\alpha$$

avec $\alpha = \arg\left(\underbrace{(1-u^2)}_{\geq 0 \text{ ou } \leq 0} + j \underbrace{\frac{u}{Q}}_{\geq 0}\right)$. On en déduit $\alpha \in [0, \pi]$. On a donc intérêt à utiliser la fonction arccos .



$$\cos \alpha = \frac{(1-u^2)}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}$$

$$\alpha = \arccos \frac{(1-u^2)}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}$$

On en déduit :

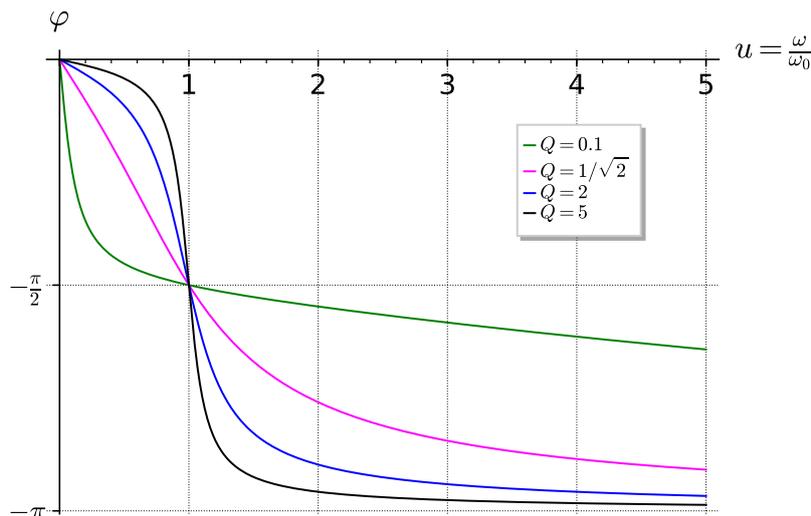
$$\varphi(u) = -\arccos \frac{(1-u^2)}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}$$

On retrouve bien les valeurs asymptotiques :

$$\varphi(0) = -\arccos(1) = 0$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi = -\arccos(-1) = -\pi$$

enfin, pour $u = 1$ ($\omega = \omega_0$), $\varphi = -\arccos(0) = -\frac{\pi}{2}$



- $\varphi(0) = 0$: À basse fréquence M vibre en phase avec A .
- À haute fréquence $\varphi = -\pi$, M vibre en opposition de phase avec A .
- Quel que soit le facteur de qualité $\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$, M est en quadrature de phase retard par rapport à A .
- Le saut angulaire de 0 à π est d'autant plus prononcé que le facteur de qualité est élevé

d) Bilan

À basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$) le mouvement du point M suit le mouvement du point A : même amplitude, même phase.

À haute fréquence ($\omega \gg \omega_0$), M oscille en opposition de phase par rapport à A avec une amplitude quasiment nulle.

On réalise ainsi un **filtrage passe-bas**.

Quel que soit le facteur de qualité : $X_m(\omega_0) = QX_{A_m}$ et $\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$

Pour $Q > 1/\sqrt{2}$ on observe une résonance pour la pulsation $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.

Pour $Q \geq 5$ $\omega_r \simeq \omega_0$ et $X_m(\omega_r) = QX_{A_m}$.

III.3. Étude de la réponse en vitesse

a) Calcul de \underline{V}_m

On note \underline{V} la grandeur complexe associée à la vitesse : $\underline{V} = V_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{V}_m e^{j\omega t}$.

$$\underline{V} = \dot{\underline{X}} = j\omega \underline{X}$$

$$\underline{V}_m e^{j\omega t} = j\omega \underline{X}_m e^{j\omega t}$$

$$\underline{V}_m = j\omega \underline{X}_m$$

$$\underline{V}_m = \frac{j\omega\omega_0^2 X_{A_m}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega_0}{Q}\omega}$$

Valeurs asymptotiques :

- $\omega \ll \omega_0$ ($\omega \rightarrow 0$)

$$\underline{V}_m \simeq \frac{j\omega\omega_0^2 X_{A_m}}{\omega_0^2} = j\omega X_{A_m}$$

$$V_m = \omega X_{A_m} \rightarrow 0 \text{ quand } \omega \rightarrow 0.$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

La vitesse tend vers 0 et est en quadrature de phase avance par rapport à l'amplitude des oscillations de A .

- $\omega \gg \omega_0$ ($\omega \rightarrow \infty$)

$$\underline{V}_m \simeq \frac{j\omega\omega_0^2 X_{A_m}}{-\omega^2} = -j \frac{\omega_0^2 X_{A_m}}{\omega}$$

$$V_m = \frac{\omega_0^2 X_{A_m}}{\omega} \rightarrow 0 \text{ quand } \omega \rightarrow \infty.$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

la vitesse tend vers 0 et est en quadrature de phase retard par rapport à l'amplitude des oscillations de A .

Cas particulier : $\omega = \omega_0$

- $\underline{V}_m = Q\omega_0 X_{A_m}$

$$V_m = Q\omega_0 X_{A_m} \text{ et } \varphi = 0.$$

L'amplitude de la vitesse du point M est égale à Q fois l'amplitude de la vitesse du point A .

Pour un facteur de qualité élevé la vitesse devient donc très importante.

b) Réponse en amplitude V_m

$$\underline{V}_m(\omega) = V_m e^{j\varphi} = \frac{j\omega\omega_0^2 X_{A_m}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega_0}{Q}\omega}$$

On divise par $j\omega\omega_0$ numérateur et dénominateur (on obtient ainsi un numérateur constant homogène à une vitesse et on fait apparaître $u = \omega/\omega_0$ au dénominateur)

$$\underline{V}_m = \frac{\omega_0 X_{A_m}}{\left(\frac{\omega_0}{j\omega} + j\frac{\omega}{\omega_0}\right) + \frac{1}{Q}} = \frac{\omega_0 X_{A_m}}{j\left(-\frac{\omega_0}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_0}\right) + \frac{1}{Q}}$$

$$\underline{V}_m(\omega) = \frac{\omega_0 X_{A_m}}{j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) + \frac{1}{Q}}$$

On pose $u = \frac{\omega}{\omega_0}$.

$$\underline{V}_m(u) = V_m e^{j\varphi} = \frac{\omega_0 X_{A_m}}{j\left(u - \frac{1}{u}\right) + \frac{1}{Q}}$$

On égale les modules

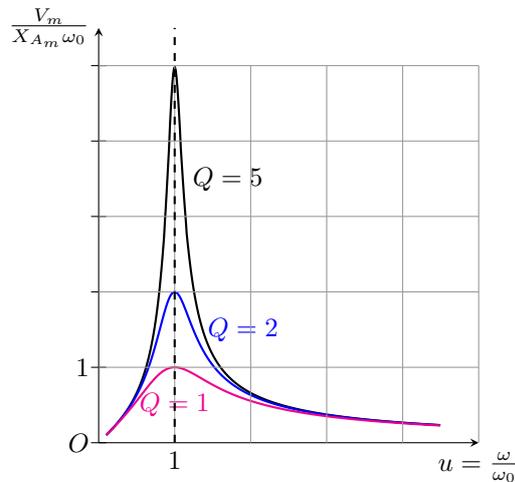
$$V_m(u) = \frac{\omega_0 X_{A_m}}{\sqrt{\left(u - \frac{1}{u}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}}}$$

Le numérateur étant constant, V_m admet un maximum lorsque $\left(u - \frac{1}{u}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}$ admet un minimum, soit lorsque $\left(u - \frac{1}{u}\right)^2 = 0$, donc $u = 1$.

Quelle que soit la valeur du facteur de qualité, il y a résonance en vitesse pour $\omega = \omega_0$.

La résonance est d'autant plus aiguë que le facteur de qualité est élevé.

On réalise un **filtrage passe-bande**.



Remarque :

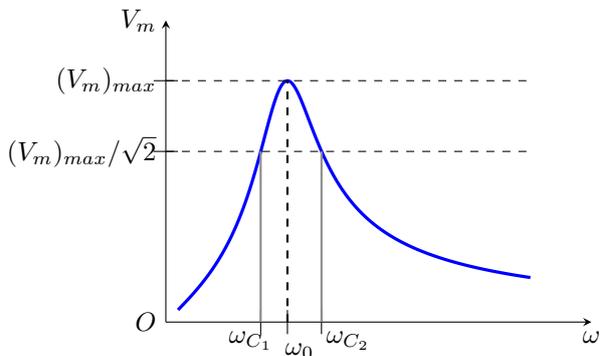
On définit la bande passante comme le domaine de pulsation $[\omega_{C1}, \omega_{C2}]$ où l'amplitude de la vitesse vérifie :

$$(V_m)_{max}/\sqrt{2} \leq V_m \leq (V_m)_{max}$$

On peut montrer que, en posant $\Delta\omega = \omega_{C2} - \omega_{C1}$:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

ω_{C1} et ω_{C2} sont appelées pulsations de coupure. Plus le facteur de qualité est élevé, plus la bande passante est étroite.



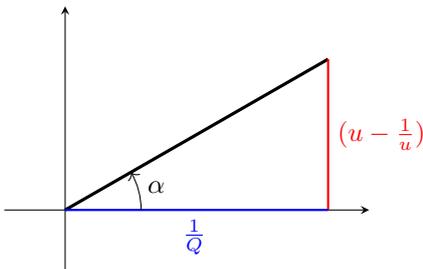
c) Réponse en phase

$$\underline{V}_m(u) = V_m e^{j\varphi} = \frac{\omega_0 X_{A_m}}{j(u - \frac{1}{u}) + \frac{1}{Q}}$$

On égale les arguments :

$$\varphi = \underbrace{\arg(\omega_0 X_{A_m})}_{=0} - \arg\left(\frac{1}{Q} + j(u - \frac{1}{u})\right) = -\arg\left(\frac{1}{Q} + j(u - \frac{1}{u})\right) = -\alpha$$

avec $\alpha = \arg\left(\underbrace{\frac{1}{Q}}_{\geq 0} + j \underbrace{\left(u - \frac{1}{u}\right)}_{\geq 0 \text{ ou } \leq 0}\right)$ $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



$$\tan \alpha = \frac{(u - \frac{1}{u})}{\frac{1}{Q}} = Q \left(u - \frac{1}{u}\right)$$

$$\alpha = \arctan \left[Q \left(u - \frac{1}{u}\right) \right]$$

$$\varphi = -\arctan \left[Q \left(u - \frac{1}{u}\right) \right]$$

On retrouve les valeurs asymptotiques :

$$u \rightarrow 0 \quad \varphi = -\arctan(-\infty) = +\frac{\pi}{2}$$

$$u = 1 \quad \varphi = \arctan(0) = 0$$

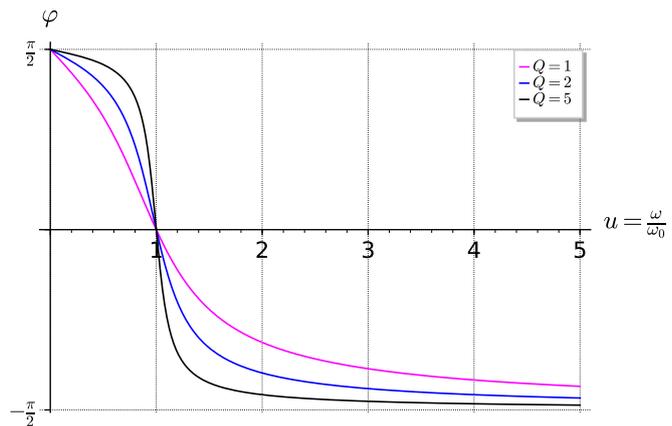
$$u \rightarrow \infty \quad \varphi = -\arctan(+\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

On vérifie qu'à basse fréquence la vitesse est en quadrature de phase avant par rapport aux oscillations de A.

On vérifie qu'à haute fréquence la vitesse est en quadrature de phase retard par rapport aux oscillations de A.

Pour $\omega = \omega_0$ la vitesse est en phase avec les oscillations de A.

Le saut angulaire de $+\pi/2$ à $-\pi/2$ est d'autant plus prononcé que le facteur de qualité est élevé.



d) Bilan

Quel que soit le facteur de qualité on observe une résonance en vitesse à une pulsation égale à la pulsation propre ω_0 du système. La résonance est d'autant plus aiguë que le facteur de qualité est élevé.

On réalise un **filtrage passe-bande**.

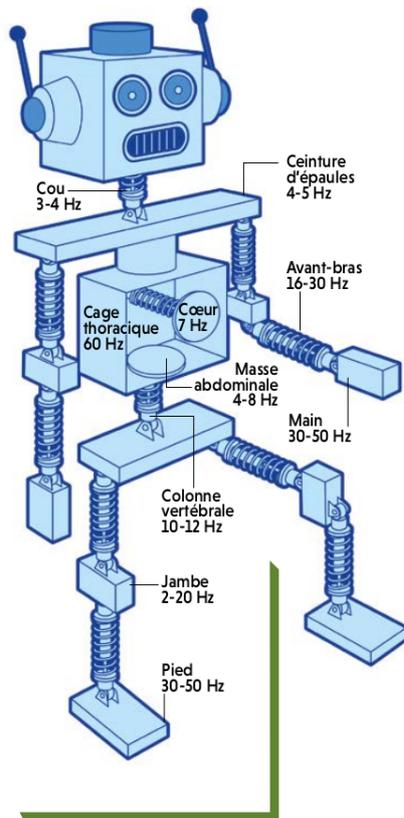
À la résonance le déphasage entre la vitesse et les oscillations du point A est nul.

Remarque : les résultats sont transposables à l'exemple 1 avec l'équivalence $\frac{F_0}{m} \leftrightarrow \omega_0^2 X_{A_m}$, soit $F_0 \leftrightarrow k X_{A_m}$.

III.4. Épilogue

On a vu combien la résonance pouvait s'avérer dangereuse. Il est indispensable de connaître la (ou les) fréquences propres d'un dispositif afin de vérifier qu'il ne sera pas excité dans ce domaine de fréquence.

À titre d'illustration, il vous sera très profitable de lire cet article paru dans le magazine Pour La Science d'Avril 2019 : "Rouler sans être secoué" de Jean-Michel Courty et Édouard Kierliek (le CDI est abonné à cette revue) et dont voici un extrait :



«LE CORPS ASSIMILÉ À DES MASSES ET DES RESSORTS

Sur le plan biomécanique, on peut modéliser le corps humain de façon simplifiée comme un assemblage de masses reliées par des ressorts amortis, comme représenté ci-contre. Cela s'applique aux membres comme aux principaux organes internes. Chacun de ces systèmes masse-ressort se caractérise par une fréquence propre d'oscillation, qui détermine son comportement lors d'oscillations imposées de l'extérieur. La conception des suspensions d'un véhicule doit en tenir compte. En particulier, il faut éviter que le véhicule oscille à des fréquences qui soient trop proches des fréquences propres des parties du corps humain, ce qui donnerait lieu à une amplification par effet de résonance. Les suspensions sont, de ce fait, conçues pour que leur fréquence de résonance soit voisine de 1 hertz.»

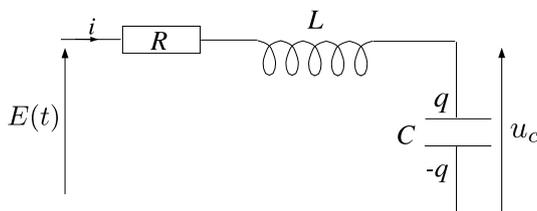
IV. Analogie électromécanique

IV.1. Mise en évidence

On a établi au II.1.a. l'équation du mouvement d'une masse m soumise à une force excitatrice $F_e(t) = F_0 \cos \omega t$:

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F_e(t)$$

On considère un circuit R, L, C série soumis à une tension $E(t) = E_0 \cos \omega t$



avec R la résistance du résistor, L l'inductance de la bobine, C la capacité du condensateur. On rappelle ci-dessous les relations courant-tension en convention récepteur (u et i orientés dans des directions opposées) :

$u = Ri$	$u = L \frac{di}{dt}$	$u = \frac{q}{C}$ et $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$

On note q la charge du condensateur. On peut montrer qu'elle vérifie l'équation :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = E(t)$$

Si l'on compare à l'équation du mouvement établie II.1.b, on peut établir les équivalences :

$$\begin{aligned}
 q &\leftrightarrow x \\
 \dot{q} = i &\leftrightarrow \dot{x} = v \\
 L &\leftrightarrow m \\
 R &\leftrightarrow h \\
 \frac{1}{C} &\leftrightarrow k \\
 E(t) &\leftrightarrow F(t) \\
 \frac{1}{2}Li^2 &\leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 \\
 \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} &\leftrightarrow \frac{1}{2}kx^2 \\
 Ri^2 &\leftrightarrow hv^2
 \end{aligned}$$

IV.2. Impédance mécanique

Dans le cadre du cours de SI, vous avez défini la notion d'impédance électrique. Pour un dipôle d'impédance \underline{Z} , on a en convention récepteur :



Application :

À partir de la relation courant-tension fournie dans le tableau ci-dessus, retrouver l'expression de l'impédance complexe d'une bobine.

Par analogie, on peut définir une impédance mécanique par la relation :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{F}}{\underline{V}}$$

avec

- \underline{F} la grandeur complexe associée à la force excitatrice.
- \underline{V} la grandeur complexe associée à la vitesse.

L'unité de l'impédance mécanique est le $\text{N.m}^{-1}.\text{s}$ ou kg.s^{-1} .

Application :

Déterminer l'impédance mécanique de l'oscillateur étudiée au II.1.a.

V. Analyse spectrale d'un signal périodique

On applique rarement un signal exciteur purement sinusoïdal. On cherche donc ici à exprimer la réponse du système à un signal périodique quelconque en régime établi. Nous disposons de deux atouts précieux :

- l'équation différentielle qui régit le système est linéaire
- tout signal périodique s'exprime comme une somme de signaux sinusoïdaux.

V.1. Analyse de Fourier

Le mathématicien Joseph Fourier (1768-1830) a établi le théorème suivant :

Tout signal périodique de période T , de fréquence $f = 1/T$, de pulsation $\omega = 2\pi f$, peut s'exprimer sous la forme d'une somme de signaux sinusoïdaux de pulsations multiples de ω appelée **série de Fourier** :

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$



avec $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et $a_n = A_n \cos \varphi_n$, $b_n = -A_n \sin \varphi_n$ (voir poly Signal sinusoïdal).

Des formules mathématiques permettent de calculer les valeurs des coefficients a_n et des b_n , connaissant l'expression de la fonction $s(t)$ (elles ne sont pas à connaître).

- A_0 correspond à la **valeur moyenne du signal**.
En effet : $\langle s(t) \rangle = \langle A_0 \rangle + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \langle \cos(n\omega t + \varphi_n) \rangle = A_0$ car la valeur moyenne d'un cosinus est nulle.
- le terme $A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ correspondant à $n = 1$ et donc de même fréquence que le signal, est appelé **fondamental**.
- le terme $A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$ de pulsation ω_n multiple de la pulsation du fondamental ($\omega_n = n\omega$) est appelé **harmonique de rang n** .

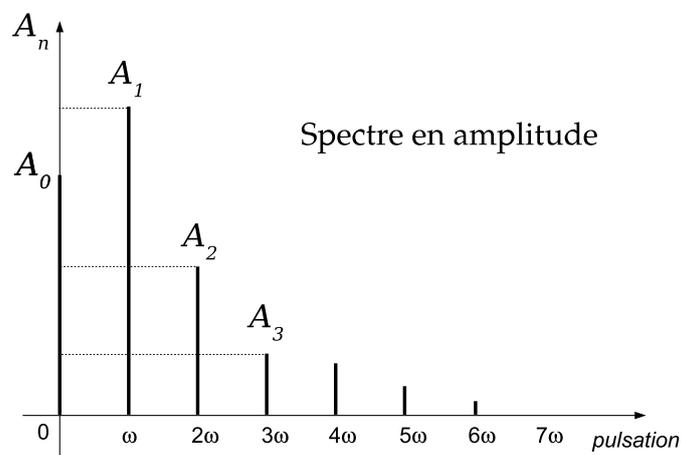
Remarques :

- Pour une fonction paire : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n = 0$.
- Pour une fonction impaire : $\langle s(t) \rangle = A_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = 0$.

V.2. Spectre en amplitude du signal

Réaliser l'analyse spectrale d'un signal consiste à déterminer les valeurs des A_n et des φ_n .

Le **spectre en amplitude** correspond à la représentation graphique des A_n en fonction des pulsations $\omega_n = n\omega$ (ou des fréquences $f_n = nf$).



V.3. Spectre en amplitude et valeur efficace

En général, l'énergie associée à un signal est liée à sa valeur efficace. Le théorème de Parseval établit la relation :

$$s_{eff}^2 = \langle s^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt = A_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n^2}{2}$$

Le carré de la valeur efficace d'un signal est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de chacune de ses composantes spectrales.

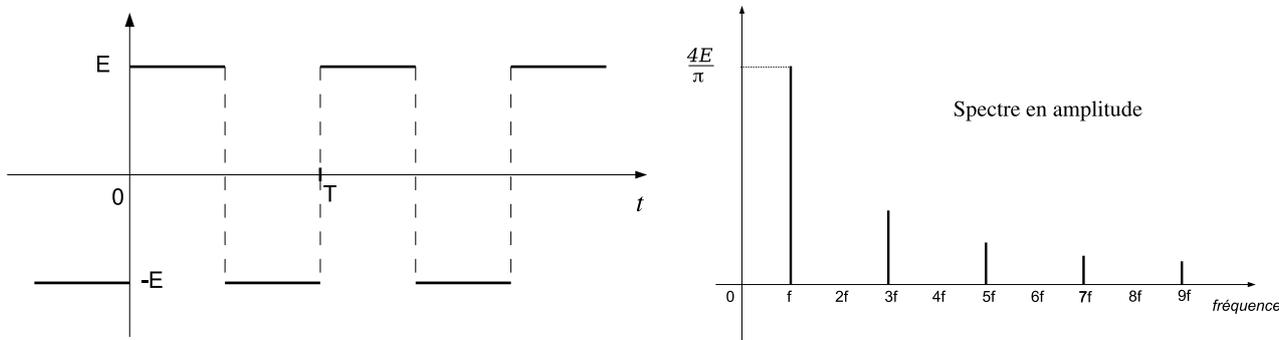
En effet $\langle A_0^2 \rangle = A_0^2$ et $\langle A_n^2 \cos^2(n\omega t + \varphi_n) \rangle = A_n^2 \underbrace{\langle \cos^2(n\omega t + \varphi_n) \rangle}_{\frac{1}{2}} = \frac{A_n^2}{2}$.

V.4. Synthèse de Fourier

L'animation proposée par le site ci-dessous permet de visualiser la construction du signal terme à terme (signal carré, signal triangulaire).

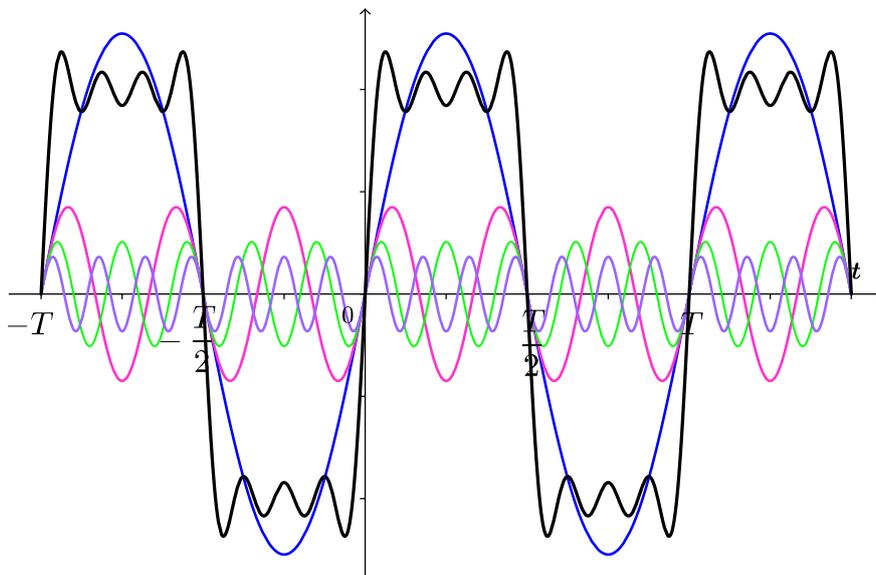
<http://ressources.univ-lemans.fr/AccessLibre/UM/Pedago/physique/02/divers/fourier2.html>

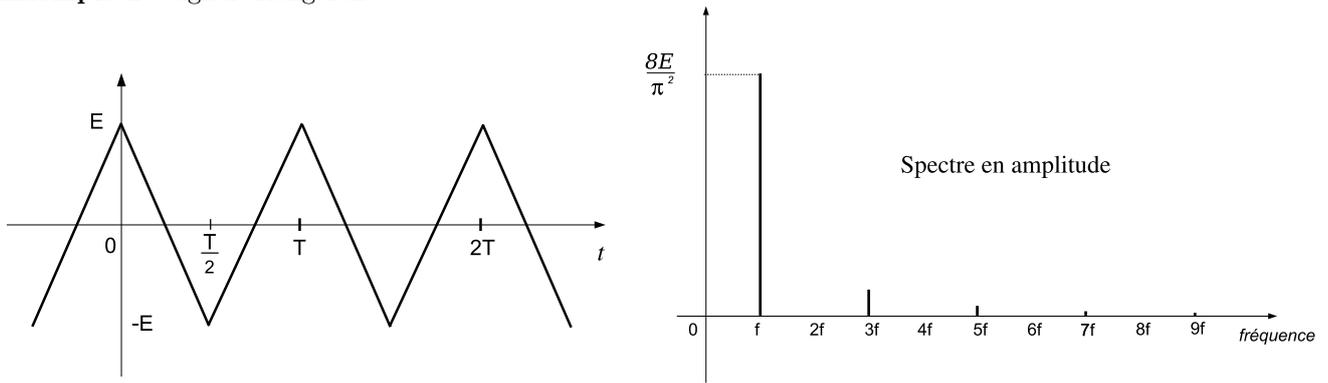
Exemple 1 : signal créneau



On peut montrer que $s(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin[(2p+1)\omega t]}{2p+1} = \frac{4E}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \dots \right)$.

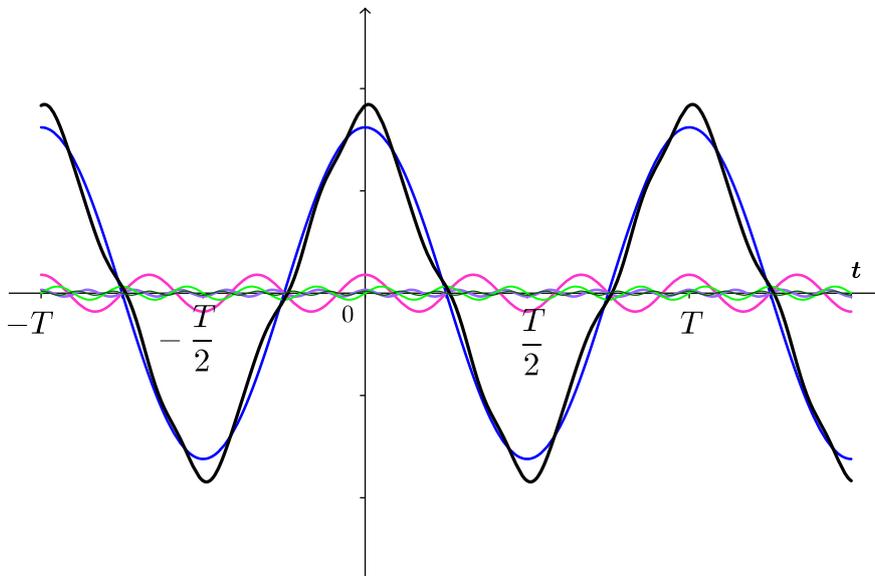
On a tracé ci-dessous les quatre premiers termes (le fondamental et les harmoniques de rang 3,5,7), ainsi que leur somme (en noir).



Exemple 2 : signal triangulaire

On peut montrer que $s(t) = \frac{8E}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\cos[(2p+1)\omega t]}{(2p+1)^2} = \frac{8E}{\pi^2} \left(\cos \omega t + \frac{\cos(3\omega t)}{9} + \frac{\cos(5\omega t)}{25} + \dots \right)$.

On a tracé ci-dessous les quatre premiers termes (le fondamental et les harmoniques de rang 3,5,7), ainsi que leur somme (en noir).



On constate que les amplitudes des harmoniques d'un créneau décroissent moins vite que celle d'un triangle. Il faudra utiliser plus de termes pour reconstituer le signal créneau que pour reconstituer le signal triangulaire. De plus, les discontinuités du créneau ne peuvent être approchées infiniment près par sa série de Fourier : quel que soit le nombre de termes utilisés, il restera toujours des petits pics au niveau des discontinuités. On appelle cela le phénomène de Gibbs.

V.5. Réponse à un signal périodique quelconque

Revenons au système régi par l'équation différentielle :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 X_{A_m} \cos \omega t$$

Cette équation différentielle est **linéaire**.

On a montré que, pour un signal sinusoïdal, l'amplitude et la phase de la réponse **en régime permanent**, dépendaient de la fréquence du signal exciteur.

$$\begin{array}{ccc} \text{Excitation} & \rightarrow & \text{Réponse} \\ X_{A_m} \cos \omega t & \rightarrow & X_m(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) \end{array}$$

avec

$$X_m(\omega) = \frac{X_{A_m}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = -\arccos \frac{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

On pose

$$G(\omega) = \frac{X_m(\omega)}{X_{A_m}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$G(\omega)$ est appelé le gain.

Supposons à présent que $X_A(t)$ soit un signal périodique non sinusoïdal. On peut alors le décomposer en une somme de signaux sinusoïdaux grâce à l'analyse de Fourier :

$$X_A(t) = X_{A_{m0}} + X_{A_{m1}} \cos(\omega t + \Phi_1) + X_{A_{m2}} \cos(2\omega t + \Phi_2) + X_{A_{m3}} \cos(3\omega t + \Phi_3) + \dots$$

avec $X_{A_{m0}}$ la valeur moyenne du signal exciteur (en général nulle). Elle correspond à une pulsation $\omega = 0$.

Le système étant linéaire la réponse à une somme est égale à la somme des réponses.

On exprime la réponse $X(t)$ sous la forme d'une somme :

$$X(t) = X_{m0} + X_{m1} \cos(\omega t + \Phi_1 + \varphi(\omega)) + X_{m2} \cos(2\omega t + \Phi_2 + \varphi(2\omega)) + X_{m3} \cos(3\omega t + \Phi_3 + \varphi(3\omega)) + \dots$$

avec

$$- X_{m1} = G(\omega) X_{A_{m1}} = \frac{X_{A_{m1}}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$- X_{m2} = G(2\omega) X_{A_{m2}} = \frac{X_{A_{m2}}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$- X_{m3} = G(3\omega) X_{A_{m3}} = \frac{X_{A_{m3}}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{3\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\left(\frac{3\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

etc...

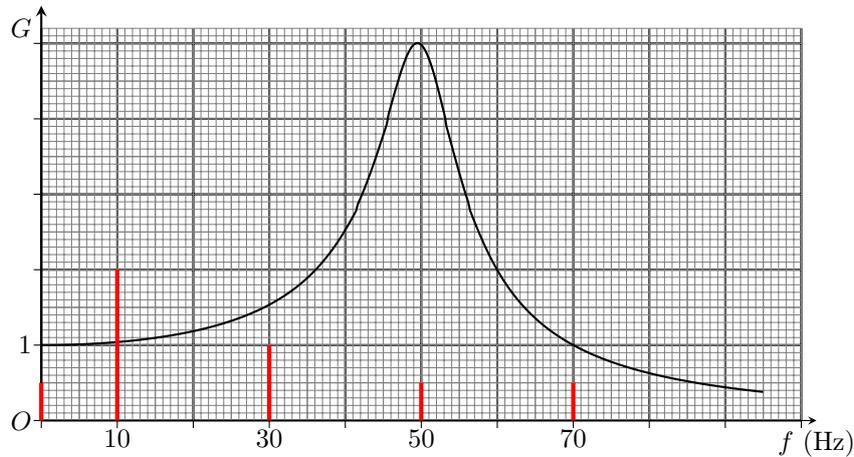
Quant à la réponse à la valeur moyenne, dans le cas étudié : $G(\omega = 0) = 1$ et $\varphi(0) = 0$: $X_{m0} = X_{A_{m0}}$.

Remarque : cela correspond à la solution particulière constante de l'équation différentielle pour une valeur $X_{A_{m0}}$ constante du signal d'entrée.

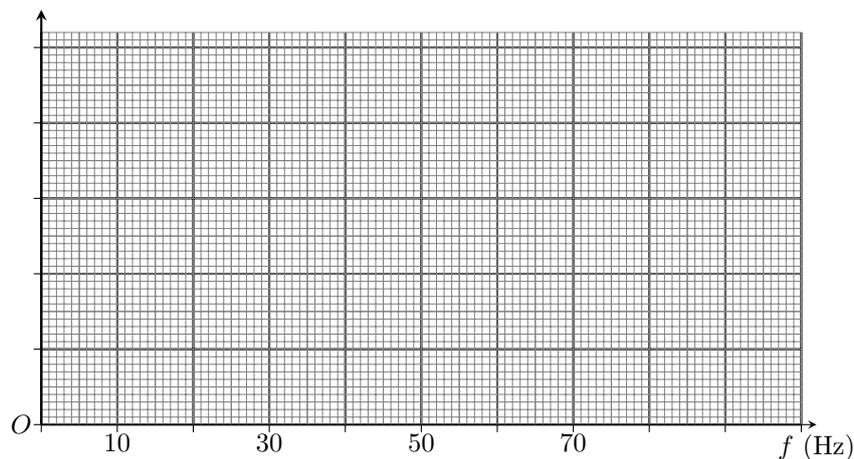
On peut ainsi construire le spectre en amplitude de la réponse en fonction du spectre de l'entrée.

Application :

On a superposé au diagramme donnant le gain en fonction de la fréquence, le spectre en amplitude du signal excitateur (échelle verticale arbitraire).



En déduire le spectre en amplitude du signal de sortie sur le diagramme ci-dessous (on suppose l'échelle verticale du spectre inchangée) :



Remarque : vous verrez en SI qu'on a plutôt intérêt à utiliser une échelle logarithmique pour les fréquences et pour le gain.

Oscillations forcées	
Régime sinusoïdal forcé	Utiliser la notation complexe modélisant un signal sinusoïdal. Établir en régime forcé les expressions de la position et de la vitesse d'un mobile en mouvement rectiligne oscillant. Simplifier et interpréter les solutions dans les cas limites basses fréquences et hautes fréquences; tracer des diagrammes asymptotiques fréquentiels. Établir la possibilité de l'existence d'une résonance en amplitude.
Analogies électromécaniques	Montrer que le modèle reste pertinent pour des systèmes mécaniques ou électriques où les équations décrivant le système sont données.
Généralisation aux signaux périodiques	Exploiter un spectre, analyser la réponse du système.