M3 - Approche énergétique du mouvement d'un point matériel

Table des matières

La dynamique newtonnienne s'appuie sur le Principe Fondamental de la Dynamique qui est une relation vectorielle :

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

On peut chercher une nouvelle formulation ne faisant apparaître que des scalaires. Cette nouvelle formulation est particulièrement bien adaptée à l'étude des mouvements à 1D.

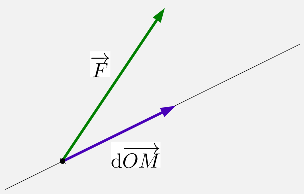
Bilan : rien de nouveau sous le soleil... c'est la formulation qui change. Dans certains cas l'approche énergétique peut s'avérer très efficace.

Le stockage de l'énergie est un défi technologique très actuel : comment stocker l'énergie électrique ?... les batteries ne pouvant pas tout, on se tourne de plus en plus vers un stockage sous forme d'*énergie potentielle de pesanteur*[1](pour un stockage à long terme) ou sous forme d'*énergie cinétique* (pour un stockage à court terme).
Ce cours se propose d'illustrer ces différentes notions.

1. lire par exemple l'artice de E. Kierlik et JM. Courty, Lithoélectricité, *Pour la science* Avril 2025

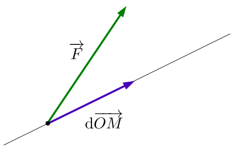
I. Travail et puissance d'une force

I.1. Travail

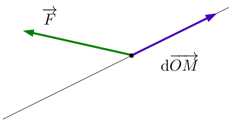


Soit $\vec{F}$ une force s'exerçant sur un point matériel M.
Soit $\delta W(\vec{F})$ le **travail élémentaire** de cette force pour un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ du point M (noté également $\mathrm{d}\vec{\ell}$) :

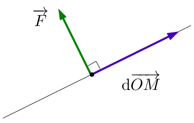
$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F}.\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \vec{F}.\mathrm{d}\vec{\ell}$$



$\delta W > 0$ travail moteur

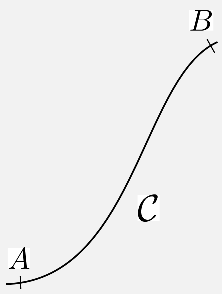


$\delta W < 0$ travail résistant



$\delta W = 0$ travail nul

C'est la composante de $\vec{F}$ tangentielle au mouvement qui travaille ($\delta W = \vec{F}_{\parallel}.\mathrm{d}\vec{OM}$).



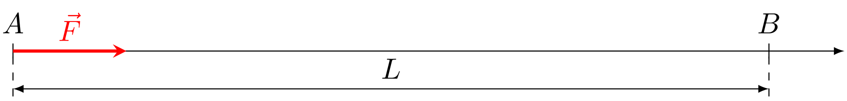
Soit $W_{A\to B}(\vec{F})$ le **travail** de la force $\vec{F}$ pour un déplacement du point A au point B le long de la courbe $\mathcal{C}$. Par définition :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F}.\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

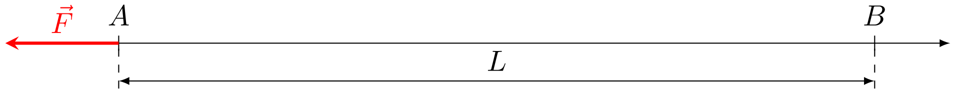
- Cas particulier d'une force $\vec{F} = \vec{cte}$:
  $W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \vec{F}.\int_A^B \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$
- Dimensionnellement : $[W] = \mathrm{N} \times \mathrm{m} = \mathrm{J}$

Application :

Calculer le travail de la force $\vec{F}$ supposée constante dans les cas suivants :

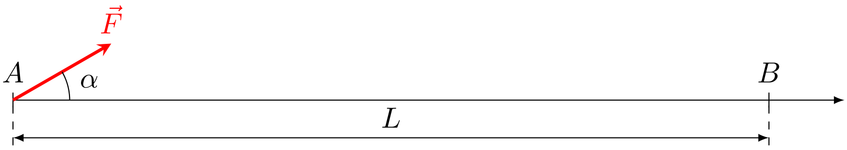


$W = FL$ avec $F = \|\vec{F}\|$; $W > 0$ travail moteur.



$$W = -FL$$

$$W < 0 \text{ travail résistant}$$



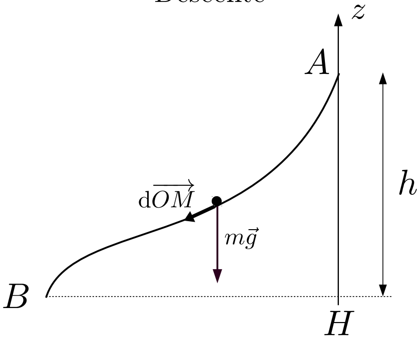
$$W = FL\cos\alpha$$

$$\alpha \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\ W > 0 \text{ travail moteur}$$

I.2. Exemples

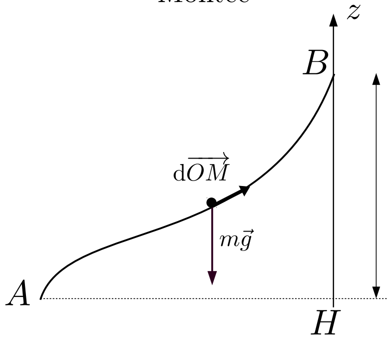
a) Travail du poids

Descente



$W = +mgh$ travail moteur

Montée



$W = -mgh$ travail résistant

$$\begin{aligned}
W &= \int_A^B m\vec{g}.\mathrm{d}\overrightarrow{OM} \\
&= m\vec{g}.\int_A^B \mathrm{d}\overrightarrow{OM} \\
&= m\vec{g}.\overrightarrow{AB} \\
&= -mg\vec{u}_z.\left[(x_B - x_A)\vec{u}_y + (y_B - y_A)\vec{u}_y + (z_B - z_A)\vec{u}_z\right] \\
&= -mg(z_B - z_A) \\
&= mg(z_A - z_B)
\end{aligned}$$

On constate que le travail du poids est indépendant du chemin suivi pour aller de A à B.

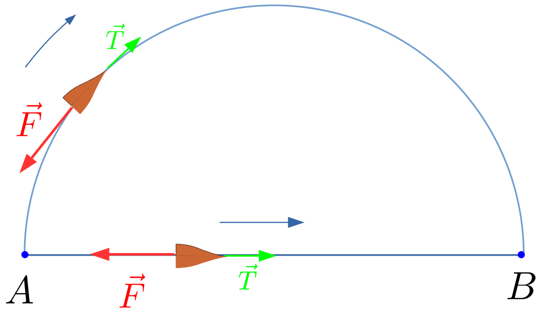
b) Travail d'une force de frottement

Un bateau se rend d'un point A à un point B via deux trajets. Il est soumis à une force de frottement opposée au mouvement $\vec{F} = -F\vec{T}$ où $\vec{T}$ est un vecteur unitaire tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement. On suppose F constante.

On considère deux trajets :

- un trajet direct rectiligne de A à B
- un trajet suivant un demi cercle de rayon R

Calculer le travail de la force $\vec{F}$ le long de ces deux trajets. Commenter.



$$\delta W = \vec{F}.\mathrm{d}\vec{\ell} = -F\vec{T}.\mathrm{d}\ell\vec{T} = -F\mathrm{d}\ell < 0$$

$$W_{A\to B} = \int_A^B -F\mathrm{d}\ell = -F\int_A^B \mathrm{d}\ell = -F\ell_{A\to B}$$

Ainsi

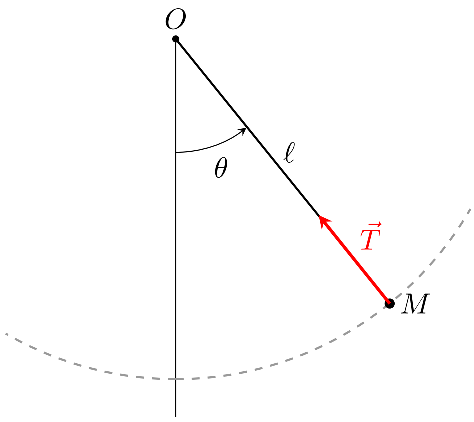
- sur le trajet 1 (ligne droite) : $W_{A\to B}(\vec{F}) = -F\times 2R$
- sur le trajet 2 (demi-cercle) : $W_{A\to B}(\vec{F}) = -F\pi R$

On constate que **le travail de la force $\vec{F}$ dépend du chemin suivi** pour aller de A à B.

> Le travail le long d'une ligne allant de A à B d'une force $\vec{F}$ **opposée au mouvement** et de **norme F constante** vaut
>
> $$W_{A\to B}(\vec{F}) = -F\,\ell_{A\to B} < 0$$
>
> où $\ell_{A\to B}$ est la distance parcourue de A à B.

c) Travail de la tension du fil du pendule

On considère une masse m accroché à un fil de longueur ℓ et susceptible d'osciller dans un plan vertical. On note $\vec{T}$ la tension du fil.



Quel est le travail de la tension du fil lorsque la masse oscille ?

Le travail est nul car la force $\vec{T}$ est toujours perpendiculaire au déplacement.

I.3. Puissance

Le travail élémentaire $\delta W(\vec{F})$ de la force $\vec{F}$ pour un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ parcouru pendant le temps $\mathrm{d}t$ s'exprime sous la forme

$$\delta W(\vec{F}) = \mathcal{P}(\vec{F})\mathrm{d}t$$

où $\mathcal{P}(\vec{F})$est la **puissance** de la force dans le référentiel d'étude. Son unité SI est le watt (W).

On peut alors écrire

$$\mathcal{P} = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t}$$

dimensionnellement : $[\mathcal{P}] =$ $\mathrm{J.s^{-1}} =$ W

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F}.\mathrm{d}O\vec{M} = \mathcal{P}(\vec{F})\mathrm{d}t$$

$$\vec{F}.\vec{v}(M)\mathrm{d}t = \mathcal{P}(\vec{F})\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{v}(M)$$

La **puissance** d'une force s'exerçant sur un point matériel se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ par rapport au référentiel d'étude a pour expression :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{v}$$

Ainsi, le travail et la puissance d'une force dépendent du référentiel dans lequel on se place.

Retenir :

Dimensionnellement : [Énergie] = [Puissance] × [Temps] = [Force] × [Longueur]

Dimensionnellement : $[\text{Puissance}] = \dfrac{[\text{Énergie}]}{[\text{Temps}]} = [\text{Force}] \times [\text{Vitesse}]$

II. Théorème de l'énergie cinétique

II.1. Énoncé

On se place dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen.
Soit $\vec{F} = \sum_i \vec{f_i}$ la résultante des forces s'exerçant sur un point matériel M de masse m.
Le principe fondamental de la dynamique appliqué au point M donne :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

Pour faire apparaître une puissance on multiplie scalairement par $\vec{v}$ chacun des membres de l'égalité :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

On pose $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$ appelée **énergie cinétique** du point M par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ considéré.

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\vec{F}) = \sum_i \mathcal{P}(\vec{f_i})$$

Énergie cinétique d'un point matériel :
Soit M un point matériel de masse m, se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel donné.
Son **énergie cinétique** E_c est définie par

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

avec $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$.
L'unité SI de E_c est le joule (J).

Quelques calculs d'énergie cinétique
Calculer l'énergie cinétique des systèmes suivants (par rapport à un référentiel terrestre) :

1. Système{trottinette électrique (15 kg) + utilisateur (75 kg)} se déplaçant à 25 km/h.
2. Bus de masse totale de 20 tonnes se déplaçant à 50 km/h.
3. Gouttelette d'eau dans l'air : de diamètre 10 μm, chutant à la vitesse de $3,0$ mm.s^{-1}. La masse volumique de l'eau est supposée être connue.
4. Fronde : calculer l'énergie cinétique d'une masse de 1 kg que l'on fait tourner au bout d'une corde de longueur 50 cm à raison de 2 tours par seconde.
5. Calculer l'énergie cinétique d'un enfant (20 kg) installé dans un manège à 5 m de l'axe de rotation, le manège effectuant 10 tours par minute.

Réponses :

1. $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times (15+75) \times \left(\frac{25}{3,6}\right)^2 = 2,2$ kJ.

2. $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 20 \cdot 10^3 \times \left(\frac{50}{3,6}\right)^2 = 10^4 \times \left(\frac{50}{3,6}\right)^2 = 1,9$ MJ.

3. Le volume de la goutte $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Sa masse m vaut donc $m = \rho V$ avec $\rho = 10^3$ kg.m^{-3} la masse volumique de l'eau.

   $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\rho\frac{4}{3}\pi R^3 v^2$

   $E_c = \frac{2}{3}\pi \times 10^3 \times (5 \cdot 10^{-6})^3 \times (3.10^{-3})^2 = 2,4.10^{-18}$ J.

4. $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\omega^2$

   $E_c = \frac{1}{2} \times 1 \times (0,5 \times 2 \times 2\pi)^2 = 2\pi^2 = 20$ J

5. $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\omega^2$

   $E_c = \frac{1}{2} \times 20 \times \left(5 \times \frac{20\pi}{60}\right)^2 = 10 \times \left(\frac{5\pi}{3}\right)^2 = 2,7.10^2$ J

Théorème de la puissance cinétique (TPC)

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un point matériel M est égale à la puissance résultante des forces qui s'exercent sur M.

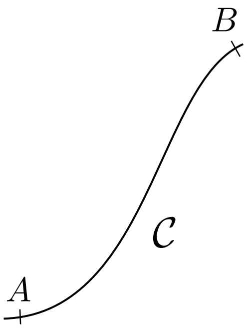
$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\vec{F}) = \sum_i \mathcal{P}(\vec{f_i})$$

Pour passer d'une puissance à une énergie, on multiplie chaque membre de l'égalité par un temps. Soit $\mathrm{d}t$ une durée infinitésimale durant laquelle l'énergie cinétique varie de $\mathrm{d}E_c$.

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \mathcal{P}(\vec{F})\mathrm{d}t = \sum_i \mathcal{P}(\vec{f_i})\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}E_c = \delta W(\vec{F}) = \sum_i \delta W(\vec{f_i})$$

On intègre de A à B, le long d'un chemin $\mathcal{C}$:



$$\int_A^B \mathrm{d}E_c = \int_A^B \delta W(\vec{F})$$

$$E_c(B) - E_c(A) = W_{A\to B}(\vec{F})$$

$$\boxed{\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = W_{A\to B}(\vec{F}) = \sum_i W_{A\to B}(\vec{f_i}\,)}$$

Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

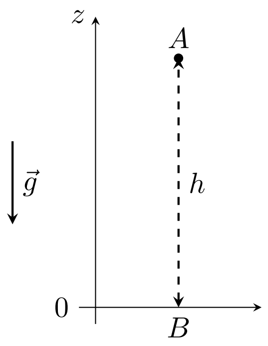
Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel M entre une position initiale A et un position finale B est égale à la somme des travaux des forces s'exerçant sur M.

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = W_{A\to B}(\vec{F}) = \sum_i W_{A\to B}(\vec{f_i}\,)$$

II.2. Exemples

a) Chute libre

On lâche depuis une hauteur h une masse m avec une vitesse nulle. On souhaite calculer sa vitesse lorsqu'elle touche le sol.



Système : masse m

Référentiel : terrestre galiléen

Bilan des forces : poids

on néglige les frottements avec l'air.

On applique le théorème de l'énergie cinétique entre le point de départ où $E_c(A) = 0$ et le point de chute B avec $E_c(B) = \frac{1}{2}mv_B^2$.

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = W_{A\to B}(m\vec{g})$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - 0 = +mgh$$

le travail du poids est moteur.

$$\boxed{v_B = \sqrt{2gh}}$$

On remarque que le résultat est indépendant de la masse (masse grave=masse inerte).

Applications numériques :

- $h = 10$ m $\quad v = \sqrt{2 \times 10 \times 10} = 10\sqrt{2} = 14$ m.s^{-1} $\simeq 50$ km.h^{-1}
- $h = 100$ m $\quad v \simeq 160$ km.h^{-1} si on néglige les frottements.

b) Calcul de la distance de freinage

Calculer la distance D de freinage d'une voiture lancée à la vitesse v_0 sur une route horizontale (on note μ coefficient de frottement solide entre les roues et la route). On néglige les frottements de l'air. *Application numérique* : $v_0 = 40$ m.s^{-1}, $g = 10$ m.s^{-2}, $\mu = 0,6$ (route sèche), puis $\mu = 0,2$ (route mouillée).

Système : voiture

Référentiel : terrestre galiléen

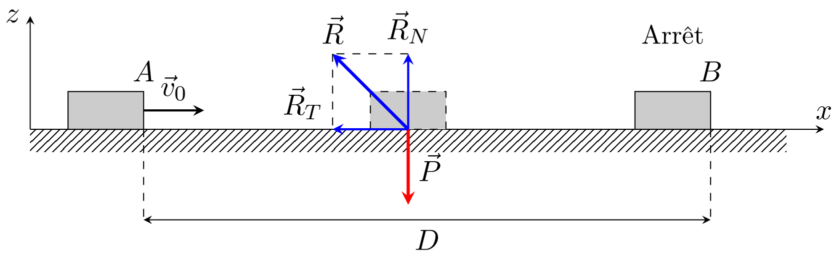
Bilan des forces :

– poids $\vec{P} = m\vec{g}$

– réaction du sol $\vec{R} = \vec{R}_T + \vec{R}_N = -R_T\vec{u}_x + R_N\vec{u}_z$

sur la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_z)$: $\quad m\vec{a}\begin{pmatrix}\ddot{x}\\0\end{pmatrix} \quad m\vec{g}\begin{pmatrix}0\\-mg\end{pmatrix} \quad \vec{R}\begin{pmatrix}-R_T\\R_N\end{pmatrix}$

On a considérablement simplifié le problème en considérant une réaction unique, résultante des réactions sur les quatre roues supposées totalement équivalentes.



Remarque : pour des raisons de lisibilité l'origine du vecteur $\vec{P}$ n'a pas été placée au centre de masse.

- PFD projeté sur $\vec{u}_z$:

$$0 = -mg + R_N$$

$$\boxed{R_N = mg}$$

Il y a glissement : d'après les lois de Coulomb $\boxed{R_T = \mu R_N = \mu mg}$.

Ainsi : $\vec{R} = -\mu mg\vec{u}_x + mg\vec{u}_z$. La réaction est une force constante.

- TEC

$$\Delta E_c = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W_{A\to B}(\vec{R}) + \underbrace{W_{A\to B}(\vec{P})}_{=0}$$

Le travail du poids est nul car le mouvement est horizontal : le déplacement est toujours perpendiculaire à $\vec{P}$.

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = W(\vec{R})$$

avec

$$W_{A\to B}(\vec{R}) = \int_A^B \vec{R}.\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \vec{R}.\overrightarrow{AB} \quad \text{car } \vec{R} = \overrightarrow{cte}$$

$$W_{A\to B}(\vec{R}) = (-R_T\vec{u}_x + R_N\vec{u}_y).\overrightarrow{AB} = -R_T\vec{u}_x.\overrightarrow{AB} = -R_T D = -\mu mgD$$

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu mgD$$

$$\boxed{D = \frac{v_0^2}{2\mu g}}$$

III. Forces conservatives

III.1. Quelques observations

Placer un livre en hauteur sur une étagère demande un effort car il faut s'opposer au poids du livre. Si jamais ce livre tombe, il va acquérir dans sa chute une certaine énergie cinétique. L'effort fourni pour monter l'objet a permis un transfert d'énergie (sous forme "potentielle") vers cet objet, énergie qui peut être restituée par la suite, par exemple sous forme d'énergie cinétique.

Cette manière de stocker de l'énergie est mise à profit dans les barrages : lorsque la production d'électricité dépasse la demande on actionne des pompes qui permettent de faire remonter l'eau dans les lacs de retenue. On stocke ainsi de l'énergie sous forme "potentielle". Lors du prochain pic de consommation on pourra récupérer cette énergie. Voir également l'article cité en introduction sur la lithoélectricité.

De même les anciennes horloges fonctionnaient à l'aide de poids qu'il fallait remonter régulièrement. Le dispositif "Gravity Light" utilise ce principe de fonctionnement :
https://deciwatt.global/gravitylight?currency=AUD
pour les bricoleurs : https://wiki.lowtechlab.org/wiki/Lampe_gravitationnelle

Les ressorts ou les dispositifs élastiques permettent également de stocker de l'énergie. Exemples : tir à l'arc ou à l'arbalète, diable sortant d'une boîte, tapette à souris...
On fournit un effort pour comprimer un ressort. Celui-ci pourra restituer l'énergie reçue lorsqu'il se détendra.

Si on tire un carton qui frotte sur le sol, on peut marcher longtemps... et ne rien récupérer ! Toute l'énergie fournie au cours du déplacement n'a pas été stockée sous forme "potentielle" : elle a été essentiellement dissipée sous forme de chaleur au niveau des zones de frottement.

III.2. Force conservative

De manière qualitative, une **force conservative** permet à un système de stocker de l'énergie (lorsque cette force s'est opposée au déplacement de l'objet), cette énergie pouvant ensuite être récupérée.

> Une force est **conservative** si son travail est indépendant du chemin suivi pour aller d'un point A à un point B.

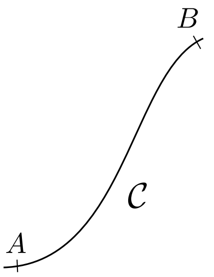
Exemples :

- ▷ le poids est une force conservative
- ▷ les forces de frottement ne sont pas conservatives

III.3. Énergie potentielle

> On dit qu'une force dérive d'une énergie potentielle E_p si son travail élémentaire $\delta W(\vec{F})$ peut s'écrire sous la forme :
> $$\delta W(\vec{F}) = -\mathrm{d}E_p$$

On peut exprimer le travail de cette force sur un chemin $\mathcal{C}$ allant du point A au point B :



$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W(\vec{F}) = \int_A^B -\mathrm{d}E_p$$

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = E_p(A) - E_p(B) = -\Delta E_p$$

On remarque que ce travail est indépendant du chemin suivi : il ne dépend que de la position initiale et finale. Toute force qui dérive d'une énergie potentielle est donc conservative.

La réciproque est vraie : à toute force conservative on peut associer une énergie potentielle E_p.

Retenir :

À toute **force conservative** on peut associer l'**énergie potentielle** E_p. Le travail de A à B de cette force s'exprime sous la forme

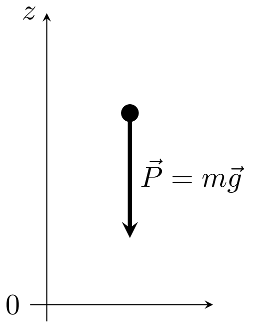
$$W_{A\to B}(\vec{F}) = E_p(A) - E_p(B) = -\Delta E_p$$

Remarques :

- l'énergie potentielle est définie à une constante additive près
- l'additivité des forces entraîne l'additivité des énergies potentielles :
  Si $\vec{f_1}$ dérive de l'énergie potentielle E_{p_1},
  si $\vec{f_2}$ dérive de l'énergie potentielle E_{p_2},
  alors $\vec{F} = \vec{f_1} + \vec{f_2}$ dérive de l'énergie potentielle $E_p = E_{p_1} + E_{p_2}$.

III.4. Énergie potentielle de pesanteur

On oriente l'axe Oz vers le haut. On note E_{pp} l'énergie potentielle de pesanteur associée au poids $m\vec{g}$. On suppose le champ de pesanteur $\vec{g}$ uniforme (même valeur en tout point).



$\delta W = m\vec{g}.\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -\mathrm{d}E_p$

$-mg\vec{u}_z.(\mathrm{d}x\vec{u}_x + \mathrm{d}y\vec{u}_y + \mathrm{d}z\vec{u}_z) = -\mathrm{d}E_p$

$-mg\mathrm{d}z = -\mathrm{d}E_p$

$E_p = mgz + cte$ si l'axe Oz est orienté $\uparrow$.

On peut choisir $E_p = 0$ pour $z = 0$. Dans ce cas $cte = 0$ et $E_p = mgz$

Si l'axe Oz est orienté vers le bas on peut montrer de même que : $E_{pp} = -mgz + cte$

Bilan :

On se place dans le champ de pesanteur terrestre supposé **uniforme** et d'intensité g.

Plus l'altitude augmente plus l'énergie potentielle doit être importante. L'**énergie potentielle de pesanteur** E_{pp} a pour expression :

- Si l'axe Oz est orienté suivant la verticale ascendante :

$$E_{pp}(z) = mgz + cte \quad \text{avec } z\uparrow$$

Si on choisit $E_{pp} = 0$ en $z = 0$ alors $E_{pp}(z) = mgz$.

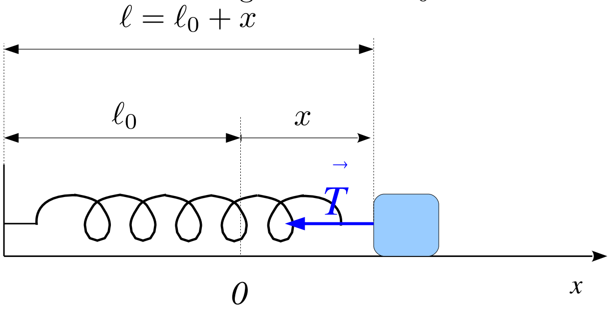
Attention :

- Si l'axe Oz est orienté vers le bas $E_{pp}(z) = -mgz + cte$.

$$E_{pp}(z) = -mgz + cte \quad \text{avec } z\downarrow$$

III.5. Énergie potentielle élastique

On note E_{pe} l'énergie potentielle élastique associée à la force de rappel d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.



$\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x = -kx\vec{u}_x$

$\delta W = \vec{T}.\mathrm{d}\vec{OM} = \vec{T}.\mathrm{d}x\vec{u}_x$

$\delta W = -kx\mathrm{d}x = -\mathrm{d}E_{pe}$

$E_{pe} = \int kx\mathrm{d}x$

$E_{pe} = \dfrac{1}{2}kx^2 + cte$

$E_{pe} = \dfrac{1}{2}kx^2$ si on choisit $E_p = 0$ pour $x = 0$ (soit $\ell = \ell_0$).

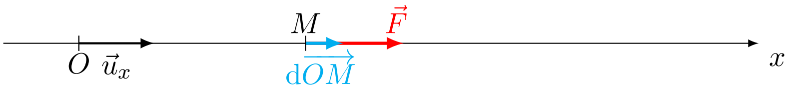
$E_{pe} = \dfrac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$ avec $E_p = 0$ pour $\ell = \ell_0$

On considère un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. **L'énergie potentielle élastique** a pour expression

$$E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 \text{ avec } E_p = 0 \text{ pour } \ell = \ell_0$$

III.6. Passage de E_p à $\vec{F}$

On se place dans le cas d'un mouvement 1D axial, par exemple suivant la direction $\vec{u}_x$. On considère une force conservative $\vec{F} = F\vec{u}_x$ associée à l'énergie potentielle $E_p(x)$.



Le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ pour un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ le long de l'axe Ox vaut :

$$\delta W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = F\vec{u}_x \cdot \mathrm{d}x\vec{u}_x = F\mathrm{d}x = -\mathrm{d}E_p$$

$$F = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}$$

On considère un mouvement rectiligne suivant la direction Ox. Soit $E_p = E_p(x)$ l'énergie potentielle associée la force $\vec{F}$. L'expression de $\vec{F}$ se déduit de celle de l'énergie potentielle par la relation :

$$\vec{F} = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\vec{u}_x$$

que l'on peut transposer de manière équivalente aux autres coordonnées :

- pour un mouvement suivant la direction Oy, $E_p = E_p(y)$ et $\vec{F} = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}y}\vec{u}_y$
- pour un mouvement suivant la direction Oz, $E_p = E_p(z)$ et $\vec{F} = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z}\vec{u}_z$

Exemple : l'énergie potentielle de pesanteur est de la forme $E_p(z) = mgz + cte$ avec $z \uparrow$.
On retrouve $\vec{P} = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z}\vec{u}_z = -mg\vec{u}_z$

IV. Théorème de la puissance mécanique

IV.1. Énoncé

On considère un point matériel M, de masse m, en mouvement dans un **référentiel $\mathcal{R}$ galiléen**. Soit $\vec{F}$ la résultante des forces qui s'exercent sur M

$$\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_{nc}$$

avec

– $\vec{F}_c = \sum_i \vec{F}_{c_i}$ la résultante des forces conservatives s'exerçant sur M

– $\vec{F}_{nc} = \sum_j \vec{F}_{nc_j}$ la résultante des forces non conservatives s'exerçant sur M

Le PFD appliqué à M dans $\mathcal{R}$ galiléen donne :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_c + \vec{F}_{nc}$$

Chaque terme étant homogène à une force, on fait apparaître une puissance en multipliant scalairement chaque terme de l'équation par une vitesse.

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}.\vec{v} = \vec{F}_c.\vec{v} + \vec{F}_{nc}.\vec{v}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \mathcal{P}_c + \mathcal{P}_{nc}$$

avec

– $\mathcal{P}_c$ la puissance des forces conservatives s'exerçant sur M : $\mathcal{P}_c = \vec{F}_c.\vec{v} = \sum_i \vec{F}_{c_i}.\vec{v}$.

– $\mathcal{P}_{nc}$ la puissance des forces non conservatives s'exerçant sur M : $\mathcal{P}_{nc} = \vec{F}_{nc}.\vec{v} = \sum_j \vec{F}_{nc_j}.\vec{v}$.

Or, $\mathcal{P}_c = \dfrac{\delta W_c}{\mathrm{d}t}$ avec $\delta W_c = -\mathrm{d}E_p$ d'où $\mathcal{P}_c = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}t}$ avec $E_p = \sum_i E_{p_i}$ l'énergie potentielle résultante.
On en déduit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_{nc}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2 + E_p\right) = \mathcal{P}_{nc}$$

On pose $E_m = \dfrac{1}{2}mv^2 + E_p = E_c + E_p$ l'énergie mécanique du système dans le référentiel d'étude.

Énergie mécanique d'un point matériel :
L'énergie mécanique d'un point matériel, dans un référentiel donné, est égale à la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle.

$$E_m = E_c + E_p$$

Théorème de la puissance mécanique (TPM)

Dans un référentiel galiléen la dérivée de l'énergie mécanique par rapport au temps est égale à la puissance des forces non conservatives.

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{nc}$$

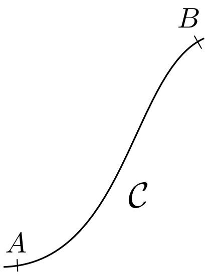
Le théorème de la puissance mécanique se déduit donc du PFD.

On peut l'exprimer sous une autre forme équivalente. En multipliant chaque terme par dt :

$$\mathrm{d}E_m = \mathcal{P}_{nc}\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}E_m = \delta W_{nc}$$

avec δW_{nc} le travail élémentaire des forces non conservatives.



$$\int_A^B \mathrm{d}E_m = \int_A^B \delta W_{nc}$$

$$\boxed{\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = W_{nc}}$$

qui correspond au théorème de l'énergie mécanique

Théorème de l'énergie mécanique (TEM)

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie mécanique est égale au travail des forces non conservatives.

$$\Delta E_m = W_{nc}$$

Mouvement conservatif
Si au cours d'un mouvement seules les forces conservatives travaillent alors $\mathcal{P}_{nc} = 0$ et $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$.

$$E_m = cte$$

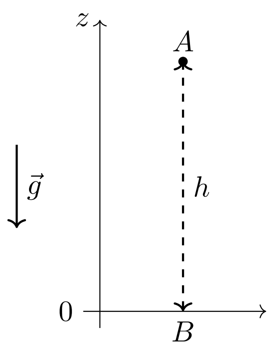
L'énergie mécanique se conserve au cours du temps. Le mouvement est dit **conservatif**.

IV.2. Exemples d'application du théorème de l'énergie mécanique :

Le théorème de l'énergie mécanique n'est pas explicitement au programme. Seul le théorème de la puissance mécanique y figure. On va cependant reprendre les exemples traités avec le théorème de l'énergie cinétique. Ils peuvent tout aussi bien être résolus en utilisant le théorème de l'énergie mécanique, le travail des forces conservatives étant pris en compte dans ΔE_m.

a) Chute libre

On lâche depuis une hauteur h une masse m avec une vitesse nulle. On souhaite calculer sa vitesse lorsqu'elle touche le sol.



Système : masse m

Référentiel : terrestre galiléen

Bilan des forces : poids (force conservative)

on néglige les frottements avec l'air.

D'après le le TPM : $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{nc} = 0$

$\Rightarrow$ l'énergie mécanique se conserve $E_m = cte$.

$E_p = E_{pp} = mgz + cte = mgz$ (si on choisit $E_p = 0$ pour $z = 0$)

$$E_m(A) = E_m(B)$$

$$mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

On remarque que le résultat est indépendant de la masse (masse grave=masse inerte).

Applications numériques :

- $h = 10$ m $\quad v = \sqrt{2 \times 10 \times 10} = 10\sqrt{2} = 14$ m.s^{-1} $\simeq 50$ km.h^{-1}
- $h = 100$ m $\quad v \simeq 160$ km.h^{-1} si on néglige les frottements.

b) Calcul d'une distance de freinage

Calculer la distance D de freinage d'une voiture lancée à la vitesse v_0 sur une route horizontale (μ coefficient de frottement solide entre les roues et la route). On néglige les frottements de l'air.

Application numérique : $v_0 = 40$ m.s^{-1}, $g = 10$ m.s^{-2}, $\mu = 0,6$ (route sèche), puis $\mu = 0,2$ (route mouillée).

Système : voiture

Référentiel : terrestre galiléen

Bilan des forces :

– poids $m\vec{g}$

– réaction du sol $\vec{R}$

sur la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_z)$: $\quad m\vec{a}\begin{pmatrix}\ddot{x}\\0\end{pmatrix} \quad m\vec{g}\begin{pmatrix}0\\-mg\end{pmatrix} \quad \vec{R}\begin{pmatrix}-R_T\\R_N\end{pmatrix}$

• PFD projeté sur $\vec{u}_z$:

$$0 = -mg + R_N$$

$$\boxed{R_N = mg}$$

Il y a glissement : d'après les lois de Coulomb $\boxed{R_T = \mu R_N = \mu mg}$.

• TEM

$\Delta E_p = 0$ car le poids ne travaille pas. D'où $\Delta E_m = \Delta E_c$. La variation d'énergie mécanique se confond avec la variation d'énergie cinétique.

$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_A^B \vec{R}.\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \vec{R}.\overrightarrow{AB} = (-R_T\vec{u}_x + R_N\vec{u}_y).\vec{AB} = -R_T\vec{u}_x.\vec{AB} = -R_T D = -\mu mgD$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \mu mgD$$

$$\boxed{D = \frac{v_0^2}{2\mu g}}$$

3. Énergie mécanique	
Travail et puissance d'une force	Calculer le travail d'une force constante lors d'un déplacement. Reconnaître les situations où le travail d'une force est nul, strictement positif ou strictement négatif.
Énergie cinétique, théorème de l'énergie cinétique	Utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour déterminer les paramètres du mouvement d'un point matériel.
Interactions conservatives. Énergie potentielle	Déterminer le travail d'une force conservative à partir de la variation d'énergie potentielle associée. Établir l'expression de la force associée à une énergie potentielle de forme connue dans le cas d'un mouvement rectiligne Citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur uniforme et de l'énergie potentielle élastique associée à un ressort.
Théorème de la puissance mécanique	Énoncer et exploiter le théorème de la puissance mécanique en présence de forces non conservatives