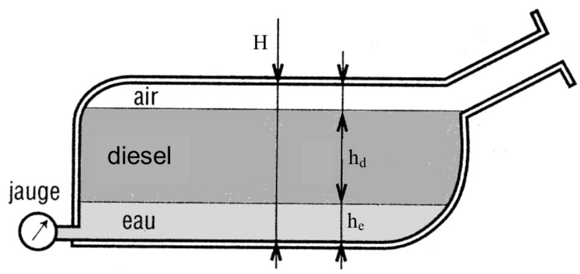
TD - MF1 Statique des fluides

1 Exemples d'utilisation de l'opérateur gradient

Rappeler la définition d'une force conservative. Établir l'expression générale reliant la force $\vec{F}$ et l'énergie potentielle E_p dont elle dérive.

2 De l'eau dans le diesel



Le principal danger pour les moteurs diesel est une forte présence d'eau dans le carburant. L'indication de remplissage d'un réservoir de carburant est proportionnelle à la pression mesurée par une jauge placée au fond du réservoir.
L'eau, de densité plus élevée que le diesel, vient se loger au fond du réservoir, faussant ainsi la mesure prise par la jauge. Le réservoir possède une hauteur totale H.

On note ρ_e la masse volumique de l'eau, ρ_d la masse volumique du diesel, g l'accélération de la pesanteur et p_a la pression atmosphérique.

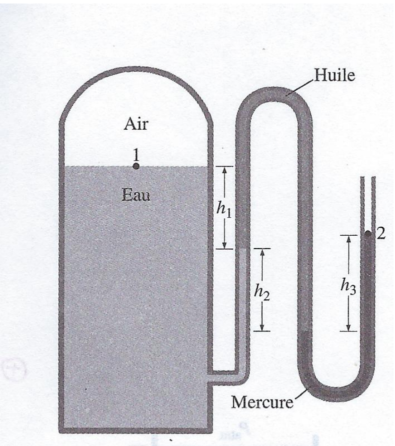
1) Déterminer la pression $p_{\max}$ indiquée par la jauge lorsque le réservoir est rempli uniquement de diesel en fonction de p_a , ρ_d , g et H.

2) Le réservoir contient maintenant de l'eau sur une hauteur h_e , déterminer en fonction de ρ_e, ρ_d, h_e et H quelle est la hauteur h_d de diesel pour laquelle la jauge indique le plein du réservoir.

<u>Application numérique</u> : Calculer le taux de remplissage $T = 100\dfrac{h_d}{H}$ pour $H = 250$ mm, h_e =18 mm , $\rho_e = 1,00.10^3$ kg.m^{-3} et $\rho_d = 846$ kg.m^{-3}.

Réponses : $h_d = H - \frac{\rho_e}{\rho_d} h_e$; $T = 91,5\%$.

3 Utilisation d'un manomètre



L'eau dans un réservoir est pressurisée par une couche d'air. La pression est mesurée à l'aide d'un manomètre multi-fluide (voir figure ci-contre).

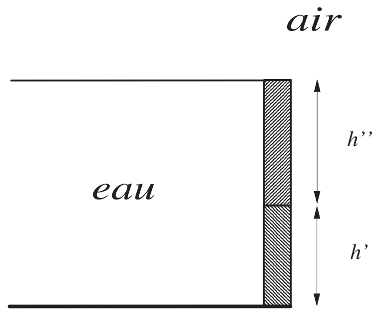
Déterminer l'écart entre la pression de l'air dans le réservoir et la pression de l'air extérieur (notée P_0) si $h_1 = 0,20$ m, $h_2 = 0,30$ m et $h_3 = 0,46$ m.

Les masses volumiques de l'eau, de l'huile et du mercure sont respectivement $\rho_e = 1,00.10^3$ kg.m^{-3}, $\rho_h = 850$ kg.m^{-3} et $\rho_{\text{Hg}} = 13,6.10^3$ kg.m^{-3}.

On prendra $g = 9,8$ m.s^{-2}.

4 Barrage ⋆

Le mur plan hachuré sur la figure ci-dessous est constitué de deux pavés de même épaisseur e de même largeur a et de hauteurs respectives h' et h''. Le réservoir situé à sa gauche est rempli d'eau de masse volumique μ ; de l'autre côté des pavés et au dessus de l'eau l'air impose une pression p_0 uniforme. On veut choisir le rapport $\frac{h''}{h'}$ pour que les résultantes $\overrightarrow{F'}$ et $\overrightarrow{F''}$ des forces de pression subies par les deux pavés soient égales.

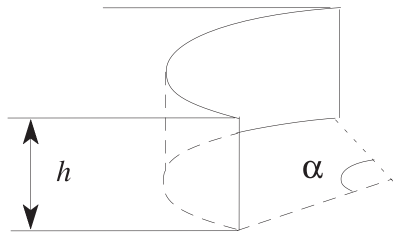


1. Prévoir sans calcul si ce rapport est supérieur ou inférieur à 1.
2. Calculer ce rapport.

Réponse : $\frac{h''}{h'} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$

5 Résultante des forces de pression s'exerçant sur un barrage. ⋆⋆⋆

Un barrage a la forme d'un secteur cylindrique caractérisé par son rayon R et l'angle α. Ce barrage est rempli d'eau, de masse volumique ρ, sur une hauteur h. Déterminer la résultante des forces de pression s'exerçant sur la paroi cylindrique. On notera g l'accélération de la pesanteur.



Réponse : $\|\vec{F}\| = \rho R g h^2 \sin\frac{\alpha}{2}$

6 Étude de l'atmosphère (ATS 2022)

A - Modèle de l'atmosphère isotherme

La pression atmosphérique décroît avec l'altitude. Cette partie propose d'étudier cet aspect. On choisit un axe z orienté vers le haut, on note $p_0 = 1,0$ bar la pression atmosphérique au niveau du sol (en $z = 0$) et $p(z)$ sa valeur pour une altitude z. On modélise l'atmosphère comme étant :

- statique,
- isotherme (température notée T_0, prise environ égale à 15°C),
- et se comportant comme un gaz parfait.

Enfin, on note $R = 8,3$ J.K^{-1}.mol^{-1} la constante des gaz parfaits, $g = 9,8$ m.s^{-2} l'intensité de la pesanteur, et $M = 29$ g.mol^{-1} la masse molaire de l'air.

1. Démontrer, à l'aide d'un bilan des forces sur un volume élémentaire de fluide situé entre les altitudes z et $z + \mathrm{d}z$, que la pression satisfait à la relation suivante, où ρ est la masse volumique de l'air :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g. \tag{1}$$

2. Établir la relation entre la masse volumique $\rho(z)$ à l'altitude z, la pression $p(z)$ à cette altitude, T_0, R et M.

3. Établir l'équation différentielle vérifiée par $p(z)$, puis en déduire que la pression évolue selon la loi $p(z) = p_0 e^{-z/H}$ avec H une constante dont on donnera l'expression en fonction de R, T_0 , g et M.

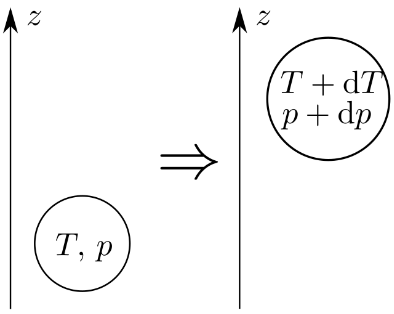
4. Calculer une valeur approchée de H, sans oublier son unité.

B - Gradient adiabatique sec ⋆⋆⋆

On s'intéresse d'abord aux variations de température subies par un volume d'air ascendant. On considère un axe z orienté vers le haut, $z = 0$ étant au niveau du sol.

On considère un volume élémentaire de fluide qui consiste en un volume fermé V d'air, situé à l'altitude z. Ce volume d'air est initialement à l'équilibre mécanique et thermique avec le reste de l'atmosphère, et on note $\rho(z)$, $p(z)$ et $T(z)$ sa masse volumique, pression et température.

On suppose que le volume d'air s'élève brusquement d'une très petite hauteur $\mathrm{d}z$. On note $\mathrm{d}p$ et $\mathrm{d}T$ les variations de pression et de température associées. On suppose cette transformation adiabatique et réversible.



Document 5

8. Quelle est la caractéristique de la transformation qui permet de la supposer adiabatique ?
9. Indiquer les conditions d'application de la loi de Laplace. En partant de la relation de Laplace qui relie pression et volume, établir la relation qui relie pression et température.
10. En déduire la relation suivante entre variation de pression et de température pour le mouvement considéré : $(1-\gamma)\dfrac{\mathrm{d}p}{p} + \gamma\dfrac{\mathrm{d}T}{T} = 0$
11. En déduire une expression de $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}$ en fonction de $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}$, γ, M, ρ et R.
12. En utilisant la relation (1) établie à la question 1 et la relation trouvée à la partie précédente, en déduire une expression de $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}$ et l'exprimer en kelvins par kilomètre.

    La valeur obtenue est appelée “gradient adiabatique sec”, et donne la variation de température par kilomètre d'altitude lorsqu'une masse d'air s'élève de façon adiabatique et réversible.

7 Modèle de l'atmosphère polytropique ⋆⋆

L'air atmosphérique est assimilé à un gaz parfait de masse molaire M. On suppose le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ uniforme à l'échelle de l'atmosphère. On note P_0 la valeur de la pression au sol ($z = 0$).

1. Dans un premier temps, on suppose la température uniforme $T(z) = T_0$. Retrouver l'expression du champ de pression $P(z)$ et montrer qu'il peut s'exprimer sous sa forme

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

et donner l'expression de H en fonction de M, g, R et T_0.

2. On adopte à présent le modèle de l'atmosphère polytropique. La température y varie désormais avec l'altitude z selon la loi $T(z) = T_0 - az$ où a est une constante positive (gradient thermique uniforme).

   (a) Établir la relation entre la pression $P(z)$ et la température $T(z)$. Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$\frac{P(z)}{P_0} = \left(\frac{T(z)}{T_0}\right)^\alpha$$

   et donner l'expression de α en fonction de M, g, a et R.

   (b) On note ρ_0 la valeur de la masse volumique au sol ($z = 0$). Déduire de la question précédente la relation entre $P(z)$ et $\rho(z)$ la masse volumique à l'altitude z. Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{P(z)}{P_0} = \left(\frac{\rho(z)}{\rho_0}\right)^q$$

   et donner q en fonction de α puis en fonction de de M, g, a et R (loi polytropique).

Réponse : $q = \frac{\alpha}{\alpha-1} = \frac{Mg}{Mg-aR}$

8 Montgolfière ⋆⋆⋆

L'air est assimilé à un gaz parfait, de masse molaire M_a, dont la température $T_0 = 283$ K est supposée uniforme et indépendante de l'altitude z. Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est supposé uniforme. Au niveau du sol la pression est $P_0 = 1,00$ bar, la masse volumique de l'air est notée $\mu_0 = \mu(0)$. Dans le cadre de ce modèle, on peut montrer que le champ de pression s'exprime sous la forme :

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \text{ avec } H = \frac{RT_0}{M_a g}.$$

1. Tracer l'allure de $P(z)$. Calculer numériquement H.
2. Établir la relation existant entre la masse volumique μ de l'air, sa température T, sa pression P, M_a et la constante des gaz parfaits R.
3. En déduire la relation entre $\mu(z)$, μ_0, z et H.

Soit un aérostat de volume $V = 2500$ m^3 supposé constant et dont l'enveloppe, la nacelle et les passagers sont de masse totale $M = 500$ kg.

Le ballon étant ouvert dans sa partie inférieure, **la pression à l'intérieur du ballon reste égale, à tout instant, à la pression extérieure.** La température de l'air à l'intérieur du ballon, supposée uniforme et notée T_C, est plus élevée que la température extérieure T_0 de l'atmosphère isotherme.

On note $m_0 = \mu_0 V$, la masse d'air déplacée par le ballon lorsque celui-ci est posé au sol.

4. On note T_C la température de l'air et μ_C la masse volumique de l'air situé à l'intérieur du ballon. Exprimer l'égalité des pressions régnant à l'intérieur et l'extérieur du ballon et en déduire la relation existant entre μ_C, T_C, T_0 et la masse volumique $\mu(z)$ de l'air à l'extérieur du ballon, situé à une altitude z quelconque.
5. Le ballon se trouve posé au sol ($z = 0$).
   (a) Exprimer $\vec{F}$ la résultante des forces s'exerçant sur le système { ballon (enveloppe+nacelle+passagers) + air contenu à l'intérieur} lorsque celui-ci est à la limite du décollage.
   (b) Montrer que le ballon peut décoller si m_0 et M vérifient l'inégalité :
   $$m_0 > M + \mu_C V$$
   (c) En déduire la température minimale $T_{C_{\text{min}}}$ devant régner dans le ballon pour que celui-ci s'élève spontanément. On exprimera $T_{C_{\text{min}}}$ en fonction de T_0, m_0 et M.
6. L'air du ballon est chauffé jusqu'à une température $T_C > T_{C_{\text{min}}}$. Déterminer dans ces conditions la hauteur maximale z_{max} atteinte par le ballon. On exprimera z_{max} en fonction de H, T_C, T_0, M et m_0. Faire l'application numérique pour $T_C = 343$ K et $T_C = 345$ K. Commenter.

Données : $g = 9,81$ m.s^{-2} ; $R = 8,31$ J.K^{-1}mol^{-1} ; $M_a = 29,0$ g.mol^{-1}.

9 "Peser" l'atmosphère

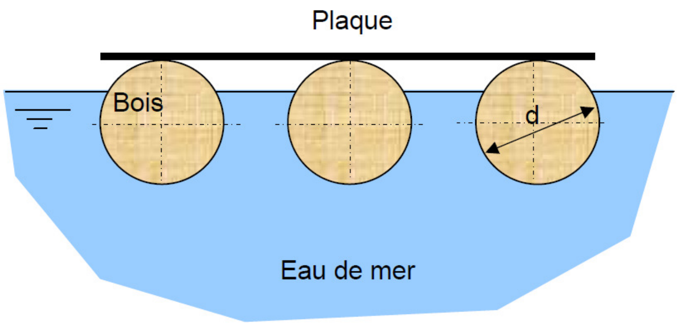
En vous appuyant sur vos connaissances estimer la masse de l'atmosphère terrestre.

10 Un peu de réflexion...

On considère un bateau flottant dans une piscine. On jette depuis le bateau une pierre dans la piscine. Est-ce que le niveau de l'eau monte, baisse, ou reste identique ?

11 Plate-forme flottante

On considère une plate-forme composée d'une plaque plane et de trois poutres cylindriques en bois qui flottent à la surface de la mer.



On donne :
- les dimensions d'une poutre : diamètre $d = 0,50$ m et longueur $L = 4,0$ m,
- la masse volumique du bois : $\rho_{bois} = 700$ kg.m^{-3},
- la masse volumique de l'eau de mer : $\rho_{mer} = 1027$ kg.m^{-3},
- la masse de la plaque $M_p = 350$ kg,
- l'accélération de la pesanteur $g = 9,81$ m.s^{-2}.

1) Calculer le poids total P_0 de la plate-forme.

2) Exprimer la condition d'équilibre de la plate-forme.

3) En déduire la fraction $F(\%)$ du volume immergé des poutres.

4) Déterminer la masse M_c de la charge maximale qu'on peut placer sur la plate-forme sans l'immerger.

Réponses : 3) $F = 82,6\%$ 4) $M_c = 420$ kg