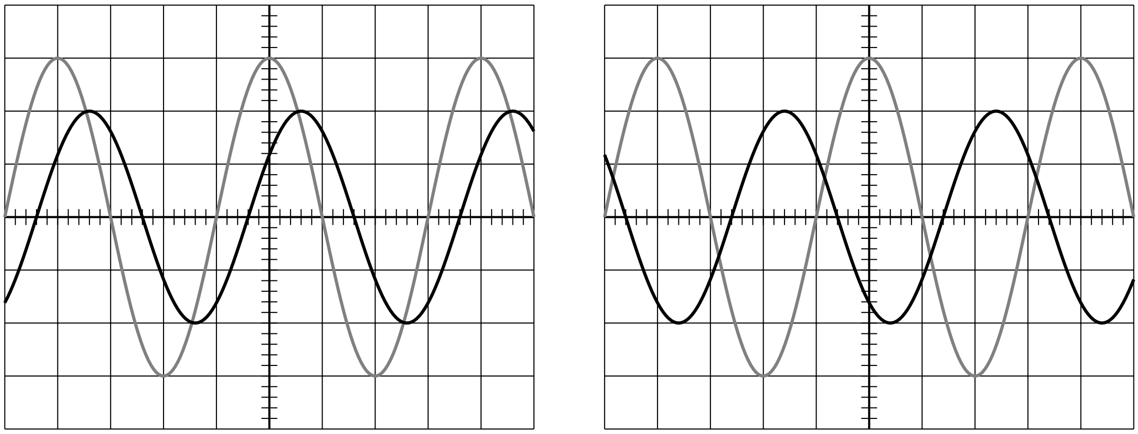
TD - M6 - Oscillations forcées

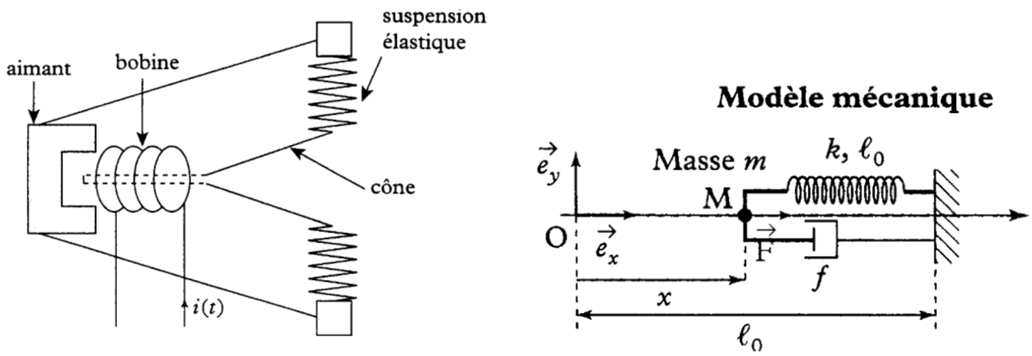
1 Mesures de déphasages



On visualise deux signaux sur un écran d'oscilloscope : le premier(en gris) s'exprime sous la forme : $e(t) = e_m \cos \omega t$ et le second (en noir) s'exprime sous la forme $s(t) = s_m \cos(\omega t + \varphi)$ avec $\varphi \in]-\pi, \pi]$. Exprimer φ dans chacun des cas.

2 Modélisation mécanique d'un haut-parleur

On modélise la partie mécanique d'un haut-parleur à l'aide d'une masse m, se déplaçant horizontalement sans frottement le long de l'axe $(O, \vec{e}_x)$. Cette masse m, assimilée à un point matériel M, est reliée à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k ainsi qu'à un amortisseur fluide exerçant une force $-\lambda \vec{v}$ (avec λ constante).



Elle est soumise à une force $\vec{F}(t)$, imposée par le courant $i(t)$ entrant dans le haut-parleur. Cette force est proportionnelle au courant $i(t)$ circulant dans la bobine et s'exprime sous la forme $\vec{F}(t) = K_0 i(t) \vec{e}_x$, avec K_0 une constante. On suppose que le courant est sinusoïdal : $i(t) = I_m \cos(\omega t)$. avec $\omega = 2\pi \times 1,0.10^3$ rad.s^{-1}.
Données : $m = 10$ g, $k = 15$ kN.m^{-1}, $K_0 = 200$ N.A^{-1} et $I_m = 1$ A.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la position x de M.
2. Poser une pulsation propre ω_0 et un facteur de qualité Q, puis calculer λ pour obtenir $Q = 1/\sqrt{2}$. On suppose cette condition vérifiée dans toute la suite.

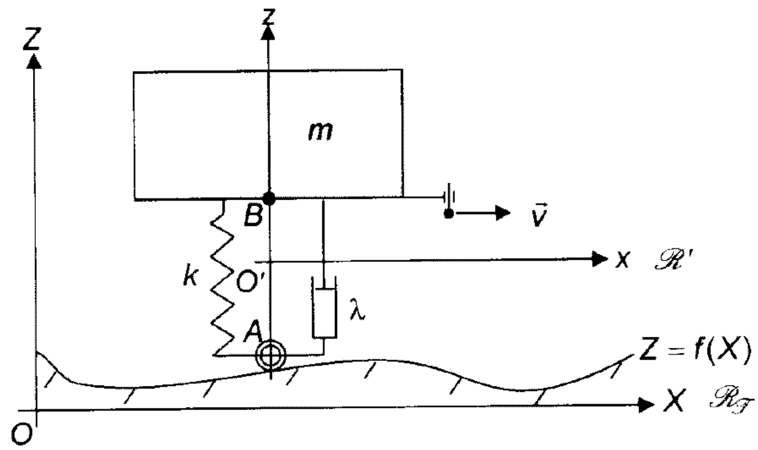
On cherche la solution en régime sinusoïdal permanent sous la forme $x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$. On passe en complexe : $\underline{x}(t) = x_m e^{i(\omega t + \varphi)} = \underline{x}_m e^{i\omega t}$.

3. Déterminer l'amplitude complexe $\underline{x}_m(\omega)$ de M en régime sinusoïdal forcé.
4. Déterminer numériquement, pour la pulsation imposée par le courant, l'expression de la réponse forcée $x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$.

3 Oscillations verticales d'une remorque.

Une remorque, assimilable à un point matériel de masse $m = 100$ kg situé en un point B, est tirée par un véhicule roulant à la vitesse horizontale constante $\vec{v}$. Elle repose sur une roulette A de dimensions et de masse négligeables devant m, par l'intermédiaire d'une suspension constituée d'un ressort de raideur $k = 6,10.10^3$ N.m^{-1} et d'un amortisseur (piston coulissant dans un cylindre rempli d'huile) dont le coefficient d'amortissement est λ. La force qu'exerce l'amortisseur sur la remorque vaut en norme $\overrightarrow{F} = -\lambda \frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t}\vec{u}_z$ où ℓ est la longueur AB.
La longueur à vide du ressort est $AB = \ell_0 = 70$ cm. On donne $g = 9,81$ m.s^{-2}.

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ est associé au repère $OXYZ$ avec OX horizontal de même direction et sens que $\vec{v}$ et OZ vertical ascendant. Le profil de la route peut être décrit par une fonction $Z = f(X)$. Le mouvement de B sera étudié par rapport au référentiel $\mathcal{R}'$ d'origine O' en translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{v}$ par rapport à $\mathcal{R}_T$ et également galiléen. L'altitude de O' dans $OXYZ$ sera définie dans la question 1) et le mouvement de B est décrit par une fonction $z(t)$.



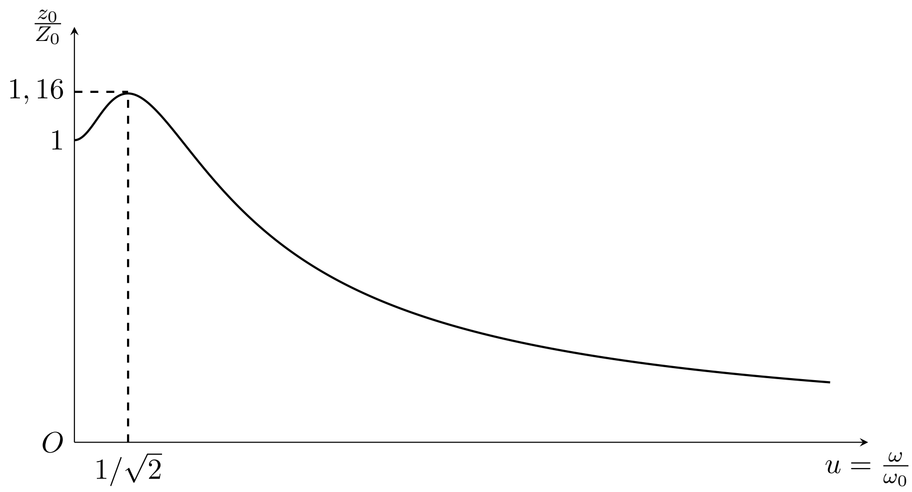
La route, dans une première partie est plane et horizontale, et correspond au profil $Z = 0$.

1. Calculer la longueur ℓ_1 du ressort quand B est à l'équilibre par rapport au référentiel $\mathcal{R}'$. Dans toute la suite, l'altitude de O' sera prise égale à ℓ_1. On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
2. Le coefficient d'amortissement λ possède, dans toute la suite, une valeur critique $\lambda = \lambda_c = 2\sqrt{mk}$. Calculer numériquement λ_c et établir l'équation différentielle du mouvement de B dans $\mathcal{R}'$. Résoudre cette équation avec comme conditions initiales : $z(0) = z_0 = 10$ cm et $\dot{z} = \dot{z}_0 = 0$. Quel est l'intérêt pratique de la présence de l'amortisseur ?

La route possède à présent un profil sinusoïdal de type "tôle ondulée" décrit par la fonction $Z(t) = Z_0 \cos(2\pi \frac{X}{L})$ où $Z_0 = 5,0$ cm.

3. (a) Quelle est l'expression de la pulsation ω du mouvement de la roulette A dans le référentiel $\mathcal{R}'$?
   (b) On observe qu'en régime établi, $z(t)$ est sinusoïdal et de même pulsation ω. Établir l'équation différentielle du mouvement de B dans $\mathcal{R}'$.
   (c) Pour la résoudre, on utilise la notation complexe. On pose $\underline{Z}(t) = Z_o e^{i\omega t}$, $\underline{z}(t) = z_0 e^{i(\omega t+\varphi)}$ et $u = \frac{\omega}{\omega_0}$. Déterminer l' expression de l'amplitude complexe $\underline{z}_0 = z_0 e^{i\varphi}$ en fonction de Z_0 et u, puis de son module z_0.

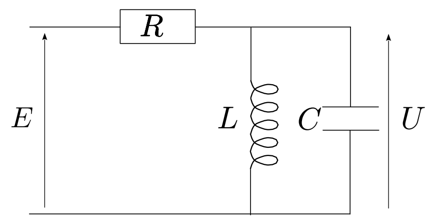
   On a tracé ci-après le graphe représentant $\frac{z_0(u)}{Z_0}$. Commenter la courbe obtenue.



(d) Que se passerait-il en l'absence d'amortisseur ($\lambda = 0$) ? Conclure.

4 Régime sinusoïdal en électricité

Les systèmes électroniques sont régulièrement soumis à des tensions sinusoïdales et peuvent, à l'image des oscillateurs mécaniques, être étudiés dans le cadre des oscillations forcées. Considérons le circuit ci-contre, excité par un générateur sinusoïdal de tension : $E(t) = E_m \cos(\omega t)$.



On peut montrer que la réponse en tension $U(t)$ du circuit vérifie l'équation différentielle suivante :

$$RC\ddot{U} + \dot{U} + \frac{R}{L}U = \dot{E}$$

qui devient, en posant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$:

$$\frac{R}{L\omega_0^2}\ddot{U} + \dot{U} + \frac{R}{L}U = \dot{E}$$

1. En régime forcé, $U(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$. Montrer que l'amplitude complexe $\underline{U}_m$ s'exprime sous la forme :
$$\underline{U}_m = \frac{E_m}{1 + j\frac{R}{L\omega_0}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$
2. Exprimer les valeurs asymptotiques de l'amplitude U_m pour $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$. Pour quelle pulsation observe-t-on une résonance ? Que vaut $U_{m,max}$?
3. Déterminer φ pour $\omega = \omega_0$.

5 Capteur de niveau d'eau (d'après ATS 2024)

On s'intéresse à la mesure de la hauteur d'eau d'une piscine grâce à un capteur capacitif.

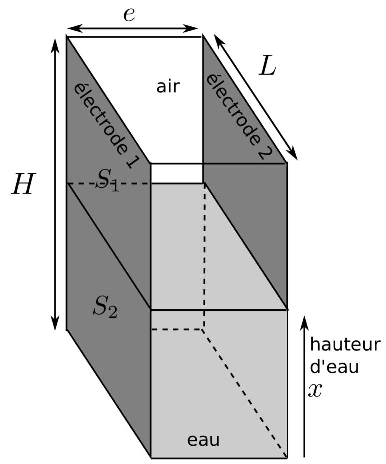
Un condensateur plan, constitué de deux armatures planes de surface S, séparées d'une épaisseur e dans le vide possède une capacité :

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}.$$

avec $\varepsilon_0 = 8,85.10^{-12}$ F.m^{-1}, la permittivité électrique du vide. On établira ce résultat dans le cours d'électrostatique (EM2).

Le principe du capteur est schématisé ci-contre. Dans un milieu de permittivité diélectrique relative ε_r, l'expression de la capacité d'un condensateur plan s'écrit :

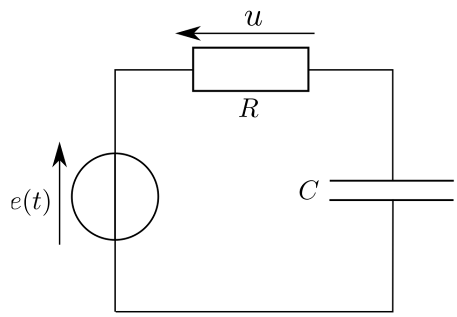
$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{e} \qquad (1)$$



On a $\varepsilon_r = 1$ pour l'air et $\varepsilon_r = 80$ pour l'eau.
Le capteur est équivalent à deux condensateurs C_1 et C_2 placés en parallèle, l'un situé dans l'air (surface des électrodes S_1 dans l'air) et l'autre dans l'eau (surface des électrodes S_2 dans l'eau). Les capacités de ces deux condensateurs placés en parallèle s'additionnent.

1. Établir l'expression de la capacité totale $C = C_1 + C_2$, et l'écrire sous la forme $C = ax + b$, avec a et b des constantes à exprimer en fonction des dimensions H, L et e du condensateur, de ε_0 et de la permittivité diélectrique relative ε_r de l'eau.

Pour mesurer la valeur de C, on place le capteur dans un montage électrique (voir ci-contre). Le générateur de tension impose une tension $e(t) = A\cos\omega t$ avec $A > 0$.



On mesure alors la tension u aux bornes de la résistance. On admet qu'elle vérifie l'équation suivante :

$$RC\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u \qquad (2)$$

On utilise le formalisme complexe : $e(t)$ est représenté par $\underline{e}(t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ et $u(t) = U_0\cos(\omega t + \varphi)$ par $\underline{u}(t) = \underline{U}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ avec $\underline{U}_0 = U_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$.
j est le nombre complexe tel que $\mathrm{j}^2 = -1$.

2. À partir de l'équation (**??**), établir l'expression de $\underline{U}_0$ en fonction de A, ω, R et C.
3. Établir l'expression de l'amplitude U_0 de la tension $u(t)$ en fonction des mêmes grandeurs.
4. On se place dans la limite basse fréquence. Préciser ce que cela signifie, et donner alors l'expression approchée de U_0 .
5. Expliquer comment ce montage permet une mesure du niveau d'eau.

6 Réponse d'un filtre

On attaque un circuit électronique avec un signal d'entrée $V_e(t) = 2 + \cos(\omega_c t) + \frac{1}{2}\cos(2\omega_c t)$, supposé exprimé en unité SI.
En régime sinusoïdal permanent la tension de sortie $\underline{V_s}$ est reliée à la tension d'entrée $\underline{V_e}$ par la fonction de transfert :

$$\frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

1. Représenter le spectre de V_e.
2. Déterminer le spectre de V_s en justifiant les valeurs prises par les différentes composantes de ce spectre.
3. Déterminer complètement l'expression de $V_s(t)$.