TD - M3 - Énergie mécanique

1 Chute libre ⋆

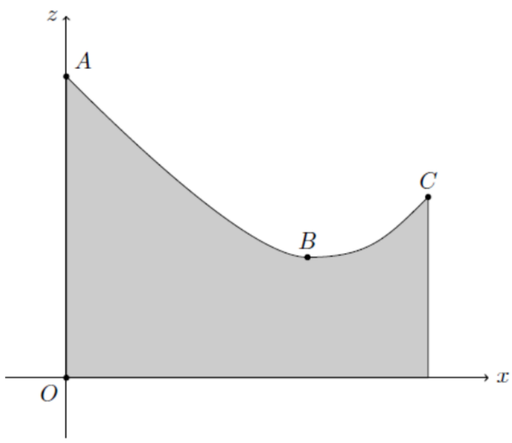
Soit un point matériel M de masse m lâché sans vitesse initiale depuis une hauteur $h = 12$ m, repéré par un axe vertical ascendant Oz, dont l'origine O coïncide avec le sol. On négligera les frottements de l'air durant la chute supposée verticale. On donne l'accélération de la pesanteur $g = 9,8$ m.s^{-2}.

1. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, calculer la vitesse atteinte au moment de l'impact avec le sol.
2. Exprimer l'énergie mécanique à un instant quelconque et en déduire l'équation du mouvement (on choisira $E_p = 0$ au niveau du sol).
3. La résoudre pour trouver $z(t)$. En déduire la durée de chute t_C.
4. En déduire les expressions de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle en fonction du temps. Tracer sur un même graphe leur évolution au cours du temps.

Réponses : $v_B = \sqrt{2gh} = 15$ m.s^{-1} ; $\ddot{z} = -g$; $t_C = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 1,6$ s.

2 Au ski

Un skieur de masse m s'élance sur un tremplin. On donne l'accélération de la pesanteur $g = 9,8$ m.s^{-2}.

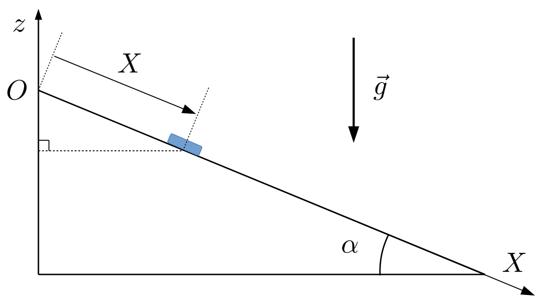


Il passe successivement par les points A d'altitude $z_A = 500$ m, B d'altitude $z_B = 200$ m et C d'altitude $z_C = 300$ m. On suppose qu'il part arrêté et on néglige tous les frottements au cours du mouvement. On choisit comme référence des énergies potentielles de pesanteur l'altitude $z = 0$ ($E_p(0) = 0$).

1. Quelle est la vitesse du skieur lorsqu'il quitte le tremplin ?
2. Quelle est la vitesse maximale atteinte par le skieur

Réponses : $v_C = \sqrt{2g(z_A - z_C)} = 63$ m.s^{-1} ; $v_{\max} = v_B = \sqrt{2g(z_A - z_B)} = 77$ m.s^{-1}.

3 Luge glissant dans la soupe ⋆



En raison des frottements, un corps solide de masse $m = 100$ kg, glissant sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale, atteint une vitesse limite constante $v_\ell = 36$ km/h. On donne $g = 10$ m.s^{-2}.

Exprimer la puissance des forces de frottement en fonction de m, g, α et v_ℓ. Faire l'application numérique.

Réponse : $\mathcal{P}_{nc} = -mg\dot{X}\sin\alpha = -mgv_\ell \sin\alpha = -5.10^3$ W.

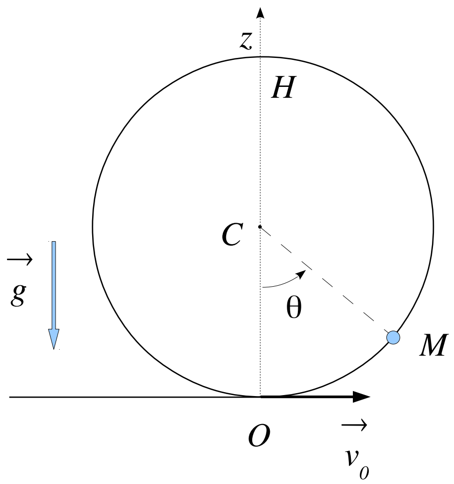
4 Rebonds d'une balle ⋆⋆

Une balle tombe d'une hauteur $h_0 = 1$ m sur un plancher sur lequel elle rebondit. Elle repart vers le haut avec une vitesse $v_1 = ev_0$, v_0 étant la vitesse de la balle lorsqu'elle atteint le plancher. Le coefficient de restitution e est égal à $0,8$. On négligera les frottements de l'air.

Quelles sont les hauteurs h_1, h_2.. et h_n atteintes par la balle après le premier rebond, le second.. le n^{ieme} ?

Réponse : $h_n = e^{2n}h_0$.

5 Looping ⋆⋆



Un point matériel M de masse m parcourt un circuit comportant une boucle circulaire, de centre C et de rayon a, située dans un plan vertical. Le point aborde le cercle en son point le plus bas O avec une vitesse horizontale de norme v_0. On repère la position de M sur le cercle par l'angle θ et on note g l'accélération de la pesanteur. On suppose le référentiel d'étude galiléen. On néglige tout type de frottement. Un dispositif approprié empêche le décollage du mobile (liaison bilatérale).

Quelle doit-être la vitesse minimale v_1 à donner à v_0 pour que le mobile atteigne le point H le plus haut du cercle ?

Réponse : $v_0 \geqslant 2\sqrt{ga}$.

6 Saut à l'élastique ⋆

On se propose de déterminer les caractéristiques d'un dispositif prévu pour le saut à l'élastique depuis un pont. L'élastique a une longueur à vide $\ell_0 = 30$ m et on lui fixe une masse d'épreuve compacte $m = 100$ kg. On lâche la masse, sans vitesse initiale, depuis le point d'accrochage de l'élastique. Elle subit une chute libre tant que l'élastique n'est pas en extension, puis elle est retenue par l'élastique sur le reste de sa course dont le point le plus bas est situé à 60 m du point d'accrochage de l'élastique. On donne l'accélération de la pesanteur $g = 9,8$ m.s^{-2}.

1. En négligeant toute résistance de l'air, calculer la constante de raideur de l'élastique.
2. Si la hauteur de chute maximale en dessous du pont est de 70 m, calculer la masse maximale que l'on peut accrocher à l'élastique.

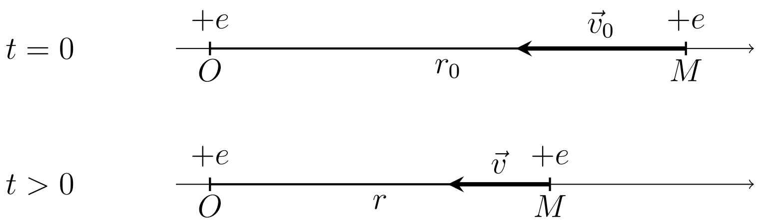
Réponses : $k = \dfrac{2mg\ell_{\max}}{(\ell_{\max} - \ell_0)^2} = 1,3.10^2$ N.m^{-1} ; $m_{\max} = \dfrac{k(h_{\max} - \ell_0)^2}{2gh_{\max}} = 1,5.10^2$ kg.

7 Distance minimale d'approche ⋆

On donne l'expression de l'énergie potentielle d'interaction entre deux charges électriques q_0 et q_M distantes de r :

$$E_p(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q_M}{r} \qquad \text{avec } \lim_{r\to\infty} E_p = 0$$

avec $\varepsilon_0 = 8,85.10^{-12}$ F.m^{-1} la permittivité électrique du vide. On considère une charge $+e$ placée en O et supposée fixe. À l'instant initial, on lance une charge $+e$ vers O depuis une distance initiale r_0, avec une vitesse de norme v_0. On néglige l'interaction gravitationnelle.



1. Tracer l'allure de la courbe $E_p(r)$ pour $r \in [0, +\infty[$.
2. Indiquer graphiquement la distance minimale d'approche r_{min}.
3. Établir l'équation vérifiée par r_{min}.
4. D'après vous, dans quel but cherche-t-on à rapprocher deux charges positives ?

8 Vitesse de libération ⋆⋆

L'énergie potentielle d'une masse m soumise au champ de gravitation terrestre est de la forme :

$$\text{pour } r \geqslant R_T \quad E_p(r) = -G\frac{M_T m}{r}$$

G désigne la constante de gravitation, M_T la masse de la Terre, R_T le rayon de la Terre et r la distance au centre de la Terre. On a choisit $E_p = 0$ pour $r \to \infty$.
On envoie une sonde spatiale de masse m depuis la Terre ($r(0) = R_T$) en lui communiquant une vitesse initiale v_0.
On considère le point de départ suffisamment élevé en altitude pour pouvoir négliger les frottements de l'air.

1. Faire un schéma représentant la Terre et la sonde à une distance r du centre de la Terre.
2. Tracer l'allure de la courbe $E_p(r)$ pour $r \in [R_T, +\infty[$.
3. En utilisant le graphique, trouver la condition sur l'énergie mécanique pour que la sonde puisse échapper à l'attraction terrestre, c'est-à-dire puisse s'éloigner infiniment de la Terre.
4. En déduire la vitesse minimale v_ℓ à lui communiquer.
5. Retrouver ce résultat en utilisant la conservation de l'énergie mécanique entre deux instants bien choisis. Faire l'application numérique.

Données : $G = 6,67.10^{-11}$ S.I. ; $M_T = 6,0.10^{24}$ kg ; $R_T = 6,4.10^3$ km

Bilan des compétences mises en œuvre :

- savoir exprimer l'énergie mécanique d'un point matériel
- savoir appliquer le TPM et distinguer les situations où l'énergie mécanique se conserve (cas où seules des forces conservatives travaillent) de celles où elle ne se conserve pas (en général quand des forces de frottement existent).
- savoir établir l'équation du mouvement à partir TPM.
- savoir analyser le graphe de E_p et en déduire le caractère borné ou non d'une trajectoire. Déterminer graphiquement les points d'arrêt.