

## TD - M2 - Énergie potentielle

Avant de commencer ce TD :

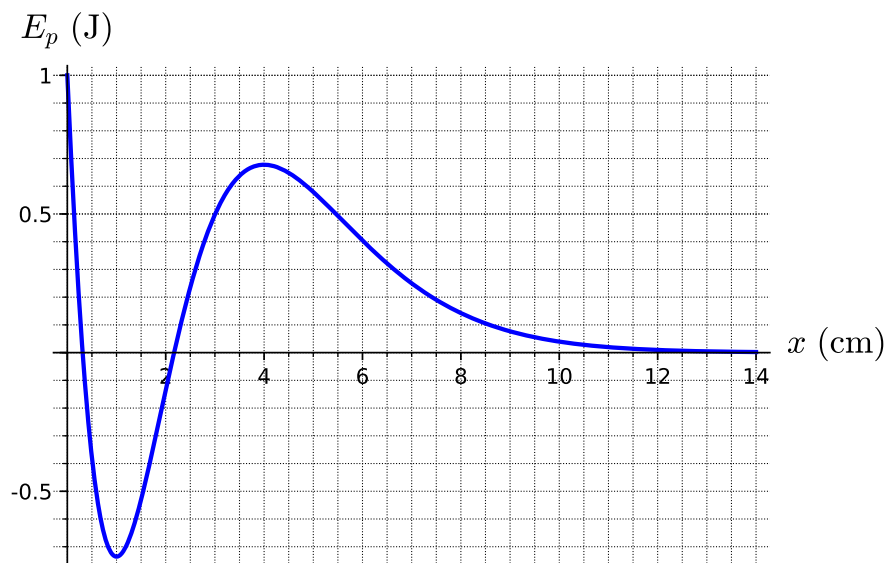
→ reprendre à titre d'exercice les exemples de la partie III.4 du cours.

→ calculer les dérivées des fonctions suivantes par rapport à  $x$  :

- $f(x) = (x + a)^2$
- $f(x) = x(x^2 + a^2)$
- $f(x) = (a - x)^2$
- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \tan x$
- $f(x) = \frac{1}{\cos x}$

### 1 Détermination de positions d'équilibre

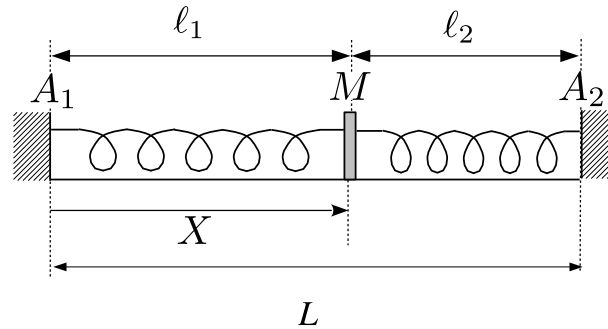
Un point matériel, repéré par sa position  $x$ , possède une énergie potentielle dont le profil est indiqué sur la courbe ci-dessous :



Déterminer graphiquement les positions d'équilibre et indiquer leur stabilité.

## 2 Deux ressorts horizontaux ★

La loi reliant la force de rappel à l'étirement d'un ressort, souvent appelée loi de Hooke par les anglo-saxons, est, pour la plupart des ressorts, mieux vérifiée en détente qu'en compression. Or, au cours des oscillations horizontales d'une masse accrochée à un ressort, ce dernier est comprimé durant la moitié du temps. C'est pourquoi on préfère souvent utiliser deux ressorts pour réaliser des oscillations horizontales. On ajuste la longueur totale du dispositif de manière à ce que les deux ressorts soient toujours étirés.

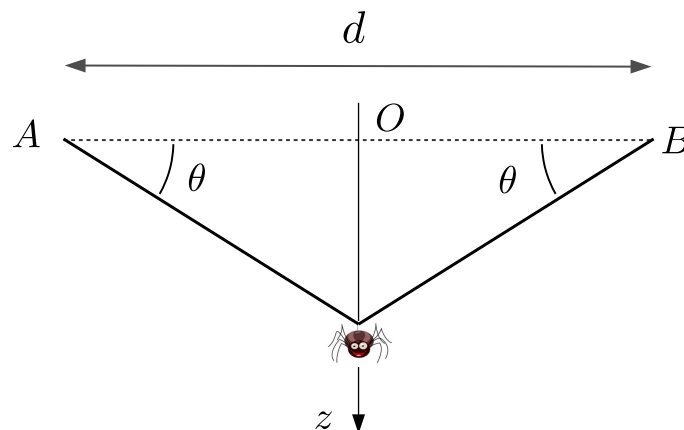


Deux ressorts  $R_1$  et  $R_2$  de longueur à vide  $l_{0_1} = 15$  cm et  $l_{0_2} = 25$  cm, de raideurs respectives  $k_1 = 50$  N.m<sup>-1</sup> et  $k_2 = 200$  N.m<sup>-1</sup> sont fixés à un point matériel  $M$  de masse  $m$  susceptible de se déplacer horizontalement sans frottement. Les autres extrémités des ressorts sont fixées en  $A_1$  et  $A_2$ . Les points  $A_1$ ,  $A_2$  et  $M$  sont toujours alignés. On donne  $A_1A_2 = L = 60$  cm.

Par une méthode énergétique, déterminer les longueurs  $l_{e_1}$  et  $l_{e_2}$  de chaque ressort à l'équilibre.

## 3 Masse suspendue à un élastique ★ ★ ★

Un fil élastique, de masse négligeable, de raideur  $k$ , de longueur à vide  $l_0$ , est fixé par ses extrémités en deux points  $A$  et  $B$  de même altitude et distants de  $d$ . En son milieu est accroché un objet quasi-ponctuel de masse  $m$ .

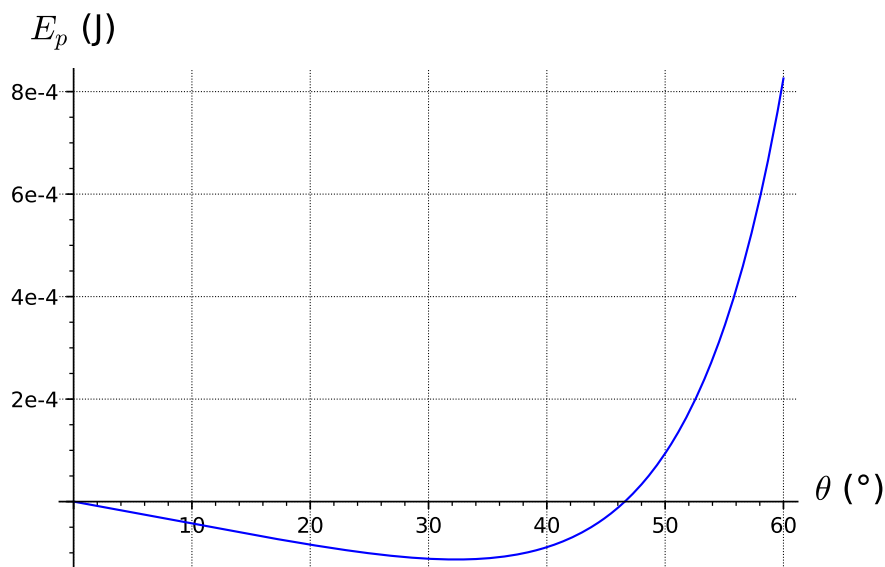
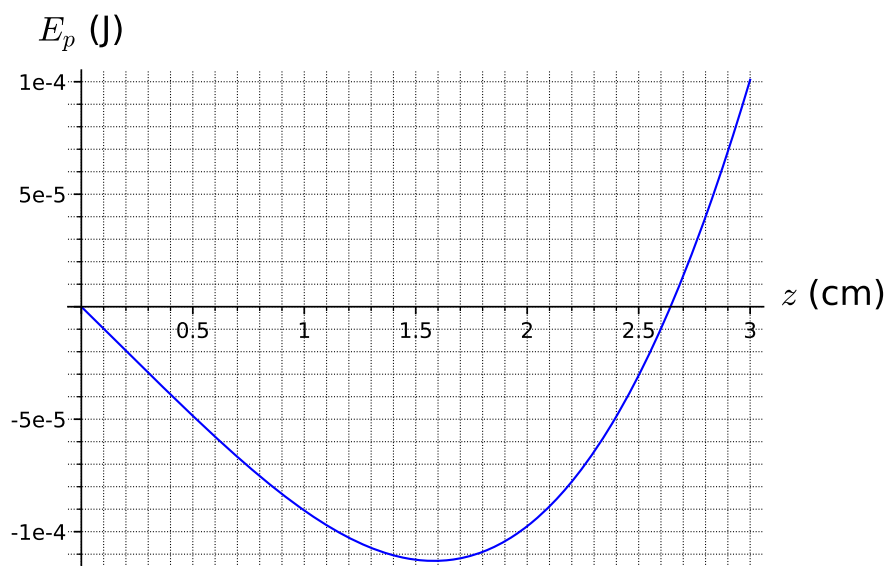


Caractériser la position d'équilibre. Pour cela, on établira au choix, soit l'équation vérifiée par  $\theta$ , soit l'équation vérifiée par  $z$  à l'équilibre.

On peut résoudre numériquement à la calculatrice l'équation obtenue.

Données :  $k = 1,0$  N.m<sup>-1</sup>,  $m = 1,0$  g,  $d = l_0 = 5,0$  cm,  $g = 9,8$  m.s<sup>-2</sup>.

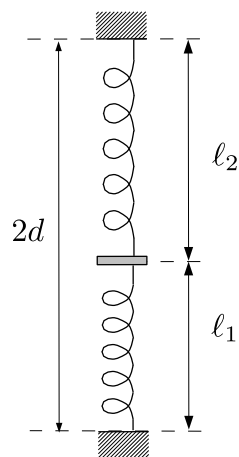
On a tracé ci-après les graphes donnant l'énergie potentielle, soit en fonction de  $z$ , soit en fonction de  $\theta$ . Déterminer graphiquement les valeurs de  $\theta$  et de  $z$  à l'équilibre. Vérifier la cohérence avec la solution numérique obtenue.



### 4 Masse ponctuelle liée à deux ressorts ★

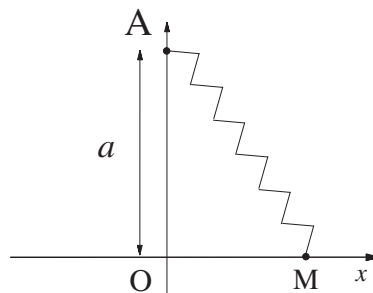
Une masse  $m$  de dimension négligeable par rapport à  $\ell_1$  et  $\ell_2$  est reliée à deux ressorts identiques placés verticalement. Les extrémités des ressorts sont distantes de  $2d$ . Chaque ressort non tendu a une longueur à vide  $\ell_0$ . et une constante de raideur  $k$ .

1. Calculer les longueurs  $\ell_{1e}$  et  $\ell_{2e}$  des ressorts à l'équilibre.
2. Montrer que si  $mg \ll 2kd$ , on peut prendre  $\ell_{1e} = \ell_{2e}$ . Interpréter.



## 5 Détermination de positions d'équilibre. Étude de leur stabilité ★ ★

On considère le système représenté sur la figure ci-contre. La masse  $m$  glisse sans frottement le long de l'axe  $Ox$ . Elle est attachée à un ressort de longueur à vide  $\ell_0$ , de raideur  $k$ , fixé en  $A$  d'abscisse  $a$ .



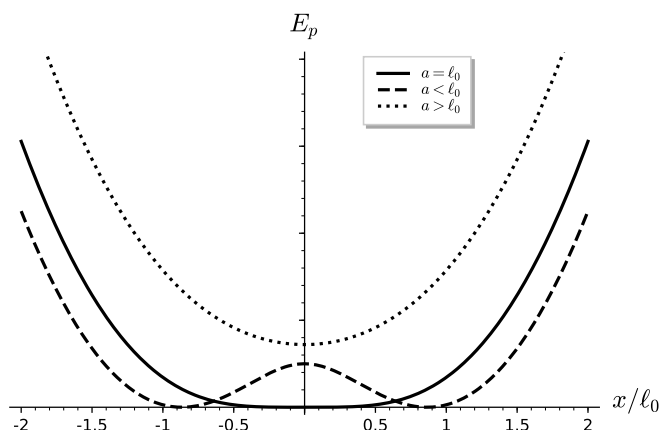
1) Exprimer  $E_p(x)$ , l'énergie potentielle de la masse  $m$ .

On pourra choisir l'énergie potentielle élastique nulle lorsque le ressort a sa longueur à vide.

2) En déduire les positions d'équilibre possibles. On distinguera les trois cas suivants :

- $a < \ell_0$
- $a = \ell_0$
- $a > \ell_0$

3) Étudier la stabilité des positions d'équilibre déterminées précédemment par le calcul et graphiquement en utilisant le graphe ci-dessous.



Il pourra être profitable de consulter le site :

[http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve\\_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort\\_bifur.html](http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort_bifur.html)

### Bilan des compétences mises en œuvre :

- savoir exprimer une énergie potentielle élastique en fonction des paramètres et de la variable d'espace choisie
- savoir exprimer une énergie potentielle de pesanteur en fonction des paramètres et de la variable d'espace choisie (en tenant compte de l'orientation choisie pour l'axe vertical)
- connaître la condition d'équilibre  $\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_e} = 0$  et savoir l'interpréter graphiquement
- savoir déterminer la stabilité d'un équilibre
- savoir dériver une fonction composée