Champ de vitesse de l'écoulement de Poiseuille cylindrique

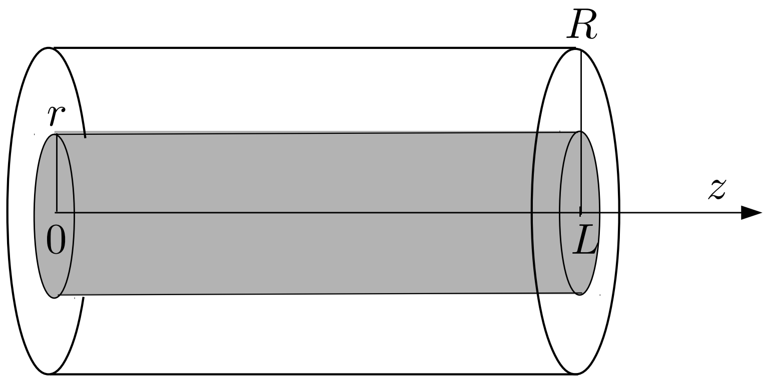
On considère un écoulement stationnaire d'un fluide visqueux incompressible dans une canalisation cylindrique de rayon R et de longueur L. On suppose l'effet du poids négligeable. On peut alors considérer que la pression est uniforme dans chaque section de conduite et ne dépend que de z. On la notera $P(z)$.

On cherche un champ de vitesse de la forme :

$$\vec{v}(M) = v_z(r)\vec{u}_z$$

1. Vérifier que le champ de vitesse proposé correspond bien à celui d'un fluide incompressible.

On choisit comme système fermé le fluide contenu, à un instant donné, dans un volume V cylindrique de rayon r, d'axe Oz et de longueur L.



L'écoulement étant stationnaire, les trajectoires des particules fluides sont confondues avec les lignes de courant : ce sont donc des droites parallèles à l'axe Oz. Puisque v_z ne dépend pas de z, chaque particule fluide se déplace à vitesse constante : elle décrit donc un mouvement rectiligne uniforme : on pourra donc considérer que la quantité de mouvement du système est constante et que la somme des forces extérieures qu'il subit est nulle.

Force de viscosité

Le fluide contenu dans le cylindre subit des forces de frottements sur sa paroi latérale. On donne la loi définissant la force tangentielle subie par un élément de surface $\mathrm{d}S$:

$$\mathrm{d}\vec{F} = \eta \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}(r)\,\mathrm{d}S\,\vec{u}_z$$

avec η le coefficient de viscosité du fluide.

2. Donner l'expression de $\vec{F}$ la résultante des forces de viscosité qui s'exercent sur la surface latérale du cylindre.

Forces de pression

3. Donner l'expression de la résultante des forces de pression s'exerçant sur le système en fonction de $P(0)$, $P(L)$ et r.

Champ de vitesse

4. La résultante des forces étant nulle, établir une relation entre $\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}$, $P(0) - P(L)$, r, η et L.
5. En déduire, par intégration, l'expression de $v(r)$ sachant qu'un fluide visqueux adhère aux parois ($v_z(R) = 0$).

Résistance hydraulique

6. Exprimer le débit volumique D_v de la conduite et en déduire la loi de Poiseuille reliant le débit volumique à la perte de charge :

$$D_v = \frac{\pi R^4}{8\eta L}(P(0) - P(L))$$

7. Par analogie avec l'électrocinétique, définir une résistance hydraulique R_h pour une conduite de longueur L et de rayon R, et donner son expression.

On donne l'expression de la divergence d'un champ vectoriel en coordonnées cylindriques :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$